

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Частина 1

**Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при
базових навантаженнях**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання за
спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія,
185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2019

Опір матеріалів. Частина 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях : конспект лекцій для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології / В. П. Шпачук, О. О. Чупринін, Н. В. Середа, В. О. Склярів ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 115 с.

Автори:

д-р техн. наук, проф. В. П. Шпачук,
канд. техн. наук, доц. О. О. Чупринін,
канд. техн. наук, доц. Н. В. Середа,
канд. техн. наук, доц. В. О. Склярів

Рецензенти:

В. Л. Хавін, професор, кандидат технічних наук, завідувач кафедри опору матеріалів (Національний технічний університет «ХПІ»);

Г. Л. Ватуля, доцент, доктор технічних наук, завідувач кафедри будівельної механіки та гідравліки (Українська державна академія залізничного транспорту)

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 31.08.2018.*

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 ГОЛОВНІ ПОНЯТТЯ	7
1.1 Головні гіпотези опору матеріалів	7
1.2 Класифікація елементів конструкцій	7
1.3 Зовнішні навантаження	8
1.4 Внутрішні зусилля	9
1.5 Напруження	11
1.6 Деформації та переміщення	13
2 ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ	16
2.1 Відомості про будівельні матеріали	16
2.2 Експериментальні дослідження властивостей матеріалів	17
2.3 Коефіцієнт поперечної деформації	28
2.4 Методи розрахунків конструкцій на міцність	29
3 РОЗТЯГ І СТИСК	34
3.1 Поздовжня сила	34
3.2 Напруження в стержнях при розтягу-стиску	35
3.3 Деформації і переміщення	39
3.4 Врахування власної ваги	42
3.5 Статично невизначені задачі	44
3.6 Приклади розрахунків	47
4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРЕЗІВ	51
4.1 Площа перерізу	51
4.2 Статичні моменти перерізу	52
4.3 Моменти інерції перерізу	53
4.4 Приклади розрахунків	61
5 ЗГИН БАЛОК	64
5.1 Внутрішні зусилля при згині	65
5.2 Напруження та деформації при згині	71
5.3 Балки, завантажені нерівномірно розподіленим навантаженням	81
5.4 Внутрішні зусилля в рамах	83
5.5 Приклади розрахунків	84
6 ЗСУВ І КРУЧЕННЯ	96
6.1 Чистий зсув	96
6.2 Розрахунок на зріз	96

6.3 Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом	97
6.4 Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент	98
6.5 Напруження і деформації при крученні	100
6.6 Приклади розрахунків	106
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ	112
ДОДАТКИ	113

ВСТУП

Опір матеріалів – це розділ механіки, якій вивчає інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій та споруд, їхню взаємодію між собою та іншими конструкціями.

Головним елементом, що розглядає опір матеріалів, є брус (стержень, балка, вал) із прямолінійною віссю (прямолінійний брус), тобто тіло, у якого розмір в одному напрямку значно перевищує двох інших розмірів.

Розрахунки на міцність полягають у визначенні, чи буде конструкція протистояти зовнішнім впливам, чи зруйнується під дією цих навантажень.

Метою розрахунків на жорсткість є визначення таких розмірів елементів конструкцій, при яких зміна розмірів і форми не перевищує заданих величин, що визначаються з умов експлуатації.

Стійкість конструкції – це її здатність зберігати свою форму рівноваги. У процесі експлуатації часто виявляється, що деформації багатьох конструкцій під дією деякого виду навантажень незначні, поки їхні величини менше деяких значень, що називаються критичними. У разі навантажень, що перевищують критичні значення, деформації конструкції різко зростають. І вона приймає іншу від первісної форму рівноваги, унаслідок чого руйнується або втрачає свої експлуатаційні характеристики. Розрахунок конструкції, що має на меті не допустити втрати стійкості, називається розрахунком на стійкість.

Для того, щоб конструкція цілком відповідала вимогам міцності, жорсткості та стійкості, а отже була надійна в експлуатації, необхідно надати її елементам найраціональнішої форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вона виготовляється, визначити відповідні розміри залежно від навантаження та його властивостей. Під час проведення розрахунків необхідно сполучити розглянуті вище характеристики з дешевиною, що є наслідком економії матеріалу.

Опір матеріалів – теоретично-експериментальна наука. Вона розробляє аналітичні методи розрахунку елементів конструкцій, а також експериментально вивчає механічні властивості матеріалів.

В опорі матеріалів задачі розподіляють на прямі, зворотні й задачі оптимізації.

Пряма задача припускає, що відомо геометрію тіла (форма, розмір, умови закріплення), зовнішні навантаження на нього (зосереджені і розподілені), механічні властивості матеріалу. Вона полягає у визначенні напружень, деформацій і переміщень у тілі.

Зворотна задача припускає, що цілком чи частково відомі напруження чи переміщення в тілі, до того ж необхідно визначити зовнішні навантаження, геометричні чи механічні характеристики тіла.

Завдання оптимізації полягає в тому, що необхідно підібрати зовнішні навантаження, геометричні чи механічні характеристики тіла у такий спосіб, щоб вони відповідали деяким критеріям (максимальна несуча здатність, мінімальна вага, можливість використання дешевших матеріалів тощо). Пошук оптимального рішення зазвичай припускає розв'язання деякої кількості прямих задач.

Основи опору матеріалів були закладені дослідженнями Галілея, Ньютона, Гука й отримали розвиток у працях таких видатних учених, як Д. Бернуллі, П. С. Лаплас, Ж. Л. Лагранж, М. Є. Жуковській, С. П. Тимошенко. Наприкінці ХХ-го століття величезний вклад у розвиток опору матеріалів внесли М. М. Беляєв, В. Г. Піскунов, В. І. Феодосьєв, Ю. Н. Шевченко та інші.

1 ГОЛОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Головні гіпотези опору матеріалів

Під час дослідження деформування конструкцій прийнято використовувати низку припущень, що істотно спрощують проведення розрахунків. Ці припущення, як показують експерименти, можна використовувати під час розв'язання більшості практичних задач.

Приведемо головні гіпотези.

1. Матеріал конструкції є однорідним і суцільним.

Ця гіпотеза затверджує, що властивості матеріалу не залежать від розмірів і форми конструкції й однакові у всіх її точках. Це допущення дає змогу не враховувати дискретну структуру матеріалу та розглядати нескінченно малий елемент конструкції (точку тіла).

2. Матеріал конструкції ізотропний.

Ця передумова припускає, що властивості матеріалу однакові у всіх напрямках. Ця гіпотеза використовується під час розв'язання більшості задач опору матеріалів.

3. Матеріал конструкції ідеально пружний.

Ідеальна пружність – це властивість матеріалу цілком відновлювати форму та розміри конструкції після того, як були усунуті причини, що спричинили її деформування. Деформування ідеально пружних тіл залежить тільки від навантажень, і не залежить від того, у якій послідовності вони прикладені.

4. Деформації в точці прямо пропорційні до напружень у певний точці.

5. Результат впливу на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу кожного навантаження окремо.

6. Принцип Сен-Венана. Відповідно до нього, результат дії навантажень, прикладених до малої області тіла, швидко убуває в міру видалення від цієї області

1.2 Класифікація елементів конструкцій

У будівельних конструкціях об'єкти за геометричними характеристиками прийнято розподіляти на низку типів.

Фундаменти (масиви) – тіла, у яких усі габаритні розміри одного порядку.

Пластини (плити) – тіла плоскої форми, у яких два габаритні розміри (довжина та ширина) великі порівнянно з третім (товщиною).

Оболонки – тіла, обмежені криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної.

Стержень (брус), прямолінійний, криволінійний – тіло, у якого два габаритні розміри малі порівняно з третім (довжиною).

Серед прямолінійних стержнів розрізняють балки, стійки, колони, осі, вали. Криволінійні стержні – це арки, колісні ободи, вантажопідйомні гаки тощо.

1.3 Зовнішні навантаження

Навантаження, що діють на конструкцію, є стосовно неї зовнішніми силами. Ці навантаження, прикладені до елементів конструкції, і розподілені у деякий спосіб на ділянках її поверхні. Їх можна розподілити на такі:

1. Зосереджені сили ($F[\text{кН}]$), моменти ($M[\text{кН}\cdot\text{м}]$).
2. Розподілені сили ($q[\text{кН/м}]$) та моменти ($m[\text{кН}\cdot\text{м/м}]$).

Крім того, навантаження можна розподілити на постійні (які діють в усі часи існування конструкції) і тимчасові, які діють тільки визначений проміжок часу.

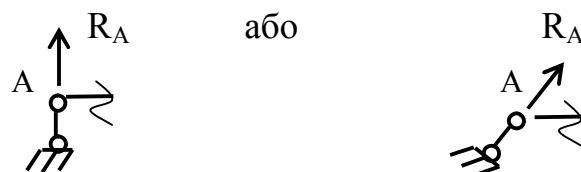
За характером впливу навантаження можна розподілити на статичні й динамічні. Статичні, навантажують конструкцію поступово, під час експлуатації вони не змінюються або змінюються повільно. У цьому разі всі її елементи перебувають у рівновазі, а сили інерції відсутні чи ними можна знехтувати.

Якщо прискорення різних частин тіла змінюються істотно, то силами інерції не можна знехтувати (зміна навантажень, а, отже, і швидкості елементів за невеликий період часу). У цьому разі вважається, що прикладені динамічні навантаження.

Опори та опорні реакції. Конструктивні форми опор дуже різноманітні. Для розрахунку їх схематизують у вигляді трьох головних типів:

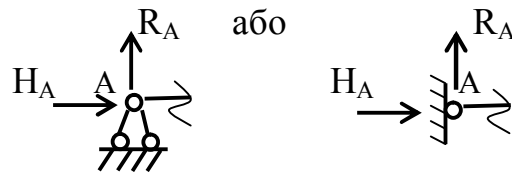
Шарнірно-рухома опора

У ній виникає тільки один складник реакції R_A , що спрямований уздовж опорного стержня.



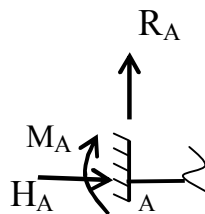
Шарнірно-нерухома опора

У ній можуть виникати два складники – вертикальна реакція R_A і горизонтальна H_A :



Затиснення (жорстке закріплення).

У ньому можуть бути три складники – вертикальна реакція R_A , горизонтальна H_A й опорний момент M_A .



Реакції в'язів належать до зовнішніх зусиль, що діють на елементи конструкції та визначаються з умови рівноваги конструкції або її окремих елементів. Усі реакції вважаються прикладеними у центрі ваги опорного перерізу.

1.4 Внутрішні зусилля

Зовнішнє навантаження викликає появу внутрішніх сил в елементах конструкції. Під внутрішніми силами ми будемо мати на увазі сили взаємодії між окремими елементами конструкції чи їхніми частинами. При цьому будемо вважати, що до навантаження тіла вони були відсутні. Внутрішні сили прийнято визначати методом перерізів.

Розглянемо рівновагу деякого елемента конструкції, на який діє система зовнішніх сил. Умовно розсічемо елемент за допомогою поперечного перерізу. Сили взаємодії частин елемента будуть однакові за величиною та протилежні за напрямом. При цьому для кожної окремої частини тіла, що також повинні перебувати в рівновазі, вони є зовнішніми, а для всього елемента – внутрішніми.

Зовнішні навантаження, які діють на частину елемента врівноважуються внутрішніми силами у перерізі. Зведемо систему

внутрішніх сил до головного вектора $\bar{R} (N_x, Q_y, Q_z)$ і головного моменту $\bar{M} (M_x = M_{кр}, M_y, M_z)$ (рис. 1.1).

Отже, взаємодія будь-яких двох частин елементів конструкції цілком визначаються шістьма складовими, які називаються внутрішніми силовими факторами:

N_x – поздовжня сила;

Q_y, Q_z – поперечні сили;

$M_{кр}$ – момент, що крутить;

M_y, M_z – згинальні моменти.

За аналогією розрізняють види навантаження.

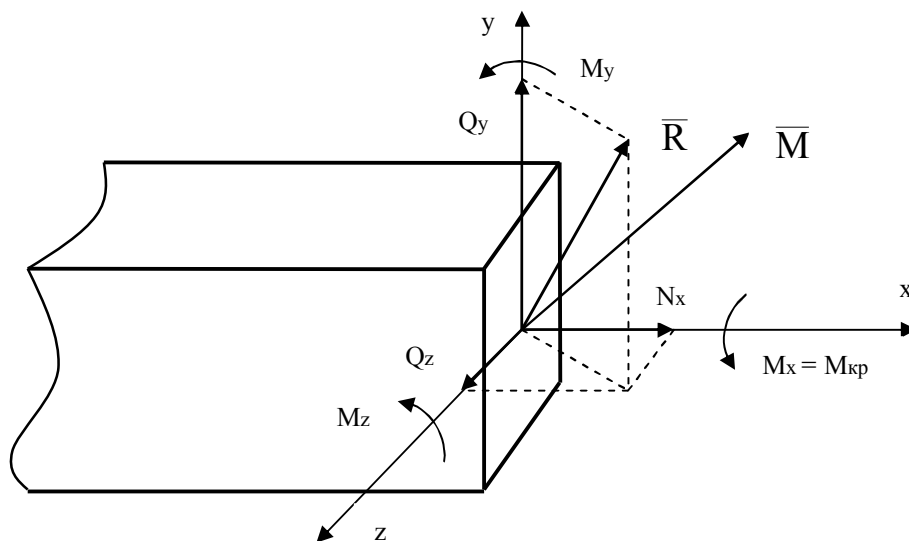


Рисунок 1.1

Розтяг-стиск виникає у разі, коли з усіх внутрішніх силових факторів ненульовою буде тільки поздовжня сила. Згин прямої балки відбувається в тому разі, коли на неї діють зосереджені моменти чи зовнішні сили, перпендикулярні до осі балки. У цьому разі з усіх внутрішніх силових факторів у перерізі виникає тільки згинальний момент і поперечна сила. Кручення виникає під дією на вал зовнішніх сил, які утворюють момент, що крутить щодо осі бруса. У цьому разі з усіх внутрішніх силових факторів в перерізі буде тільки момент, що крутить. Деформація зсуву виникає, коли зовнішні сили зміщують два рівнобіжних плоских перетини відносно один одного при незмінній відстані між ними. У цьому разі у внутрішніх перерізах виникають тільки поперечні сили.

У наслідок одночасної дії на брус системи зовнішніх сил, окремі компоненти якої, спричиняють різні види деформування, загальна ситуація деформування буде складніша, ніж розглянуті вище прості види – розтяг і стиск, згин, крутіння та зсув. Багато елементів конструкцій, розрахункова схема, яких відповідає прямолінійному брусу, спричиняють спільному впливу сил, що викликають різні види деформування: згин і розтяг-стиск, згин і крутіння, і інші сполучення розглянутих вище видів деформування. У цьому разі під час розрахунків розділяють різні види зовнішніх навантажень і розв’язують ці задачі окремо. Загальне рішення буде суперпозицією рішень окремих задач.

Внутрішні сили й моменти в різних перерізах того самого елемента конструкції загалом випадку будуть різні. Зміну внутрішніх силових факторів уздовж стержня прийнято показувати епюрами – графіками, вісь абсцис, якого відповідає осі стержня, а ординати відповідають величині силових факторів. Ці графіки будують за визначеними правилами:

1. Вісь епюри вибирають у такий спосіб, щоб вона була рівнобіжна чи збігалася з віссю стержня.
2. Ординати відкладають у відповідному масштабі від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихують епюри, лініями, перпендикулярними до осі.
4. Крім того, у поле епюри в колі ставлять відповідний знак зусилля.

1.5 Напруження

Зовнішні зосереджені навантаження в дійсності не існують, а становлять деяку ідеалізацію реального розподіленого навантаження. Аналогічно зосереджені внутрішні силові фактори, що характеризують взаємодію між окремими частинами конструкції, є статичним еквівалентом внутрішніх сил, розподілених по площі перерізу.

Прикладені до тіла зовнішні сили викликають появу в тілі внутрішніх сил. Загалом на кожній грані систему сил можна звести до головного вектора та головного моменту. При досить малих розмірах цих граней, значення головного моменту буде близько до нуля, а середнє напруження:

$$p_{cp} = \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR – рівнодіюча внутрішніх сил на деякій площадці перерізу ΔA .

Зручнішим для практичного використання є надання процесу взаємодії між частинами тіла через напруження:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}, \quad (1.1)$$

Отже, напруженням наголошується внутрішня сила, співвідноситься з одиницею площі у певній точці перерізу. Воно вимірюється в одиницях сили, поділених на одиниці довжини у другому ступені ($[кН/см^2]$).

Цю рівнодіючу можна розкласти на два складники: нормальний ΔN і дотичний ΔQ . За цими складниками визначають нормальні σ і дотичні τ напруження:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}, \quad (1.2)$$

де $\Delta Q = \sqrt{\Delta Q_y^2 + \Delta Q_z^2}$ – сумарна поперечна сила.

Нормальні й дотичні напруження становлять проекції повного напруження на нормаль і площину площадки відповідно (рис. 1.2). Повне напруження:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.3)$$

Величини нормального та дотичного напруження мають досить важливе значення, оскільки вони визначають міцність конструкції, при цьому вони характеризують різні аспекти взаємодії частинок тіла. Нормальні напруження на площадці визначають інтенсивність сил відривання чи стиску частин тіла між собою, дотичні – інтенсивність сил, що зрушують сусідні елементи один відносно одного в площині перерізу. Значення напружень на кожній площадці тіла залежить від орієнтації перерізу, проведеного через цю точку. Сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють на різних площадках, характеризує напружений стан у точці тіла.

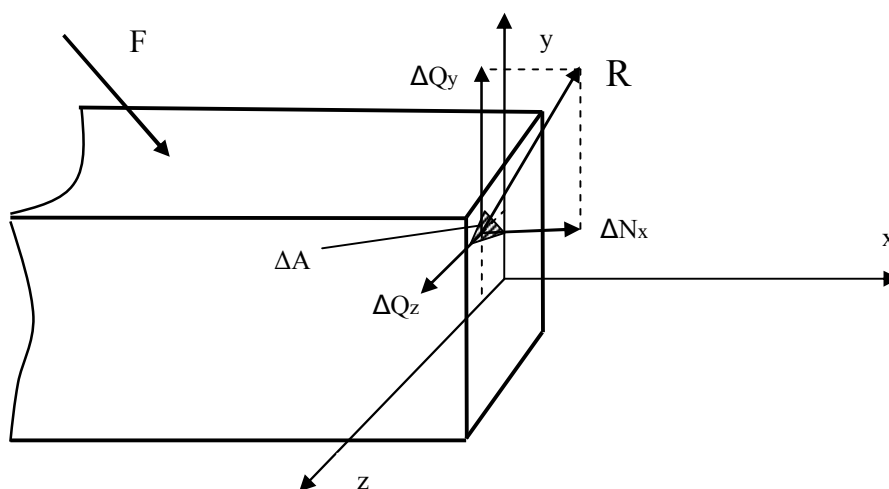


Рисунок 1.2

Компоненти напружень у кожному перерізі безпосередньо пов'язані з внутрішніми силовими факторами, що діють у цьому перерізі. Для того щоб одержати ці залежності, розглянемо елементарну площадку поперечного перерізу тіла, площею ΔA (рис. 1.2), із діючими на цій площадці нормальними та дотичними напруженнями.

Розкладемо дотичні напруження на складники, рівнобіжні відповідним осям: τ_y, τ_z . На площадку ΔA діють елементарні сили $\sigma \Delta A, \tau_y \Delta A, \tau_z \Delta A$, рівнобіжні відповідним осям. Проекції всіх елементарних сил і їхніх моментів відносно осей визначають внутрішні силові фактори (рис. 1.1), які при $\Delta A \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y dA; \quad Q_z = \int_A \tau_z dA; \\ M_x &= \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA; \\ M_y &= \int_A \sigma z dA; \quad M_z = - \int_A \sigma y dA. \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.6 Деформації і переміщення

Під дією зовнішніх навантажень конструкція деформується – змінює свої форми та розміри. При цьому її точки у деякий спосіб переміщуються.

Розглянемо пружне тіло, що у природному стані займало в просторі деяку область. Положення кожної точки цієї області в декартовій системі координат визначається трьома координатами: x, y, z , крім того, її положення можна визначити за допомогою вектора $\vec{r}(x, y, z)$ (рис. 1.3). Унаслідок прикладених до тіла зовнішніх впливів, тіло загалом змінить свою форму й переміститься в деяку іншу область, при цьому точки теж перемістяться.

Тепер їхні координати в декартовій системі координат зміняться, і положення точки буде визначатися деяким за допомогою деякого іншого вектора $\vec{r}'(x', y', z')$. Зміну положення точки визначимо вектором переміщення: $\vec{U}(x, y, z) = \vec{r}' - \vec{r}$.

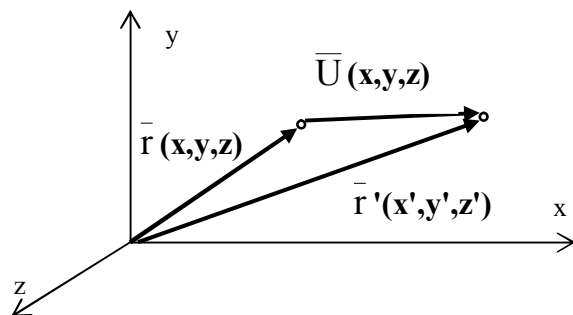


Рисунок 1.3

Крім того, що в процесі деформування точки змінюють своє положення, міняється відстань між ними. Ця зміна, співвіднесена з первісної відстані між ними, називається деформацією (відносна лінійна деформація). Розглянемо деформацію деякого елемента ds . Квадрат довжини цього відрізка буде дорівнює: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, де dx, dy, dz – декартові координати відрізка. Деформація в напрямку s буде визначатися за допомогою співвідношення: $\varepsilon_s = (ds_1 - ds) / ds$, де ds_1 – довжина елемента після деформування. Квадрат цієї довжини можна визначити за формулою:

$$ds_1^2 = (1 + 2\varepsilon_x)dx^2 + (1 + 2\varepsilon_y)dy^2 + (1 + 2\varepsilon_z)dz^2 + 2\gamma_{xy}dxdy + 2\gamma_{yz}dydz + 2\gamma_{xz}dxdz, \quad (1.5)$$

де ε – відносна лінійна деформація грані, рівнобіжної відповідної осі;

γ – зміна первісно прямого кута (кутова деформація) між гранями у відповідних напрямках.

Отже, знаючи лінійні й кутові деформації у координатних напрямках, можна визначити деформації у будь-якому напрямку. За визначенням, лінійні деформації у відповідних напрямках будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \Delta dx / dx = dU / dx; \\ \varepsilon_y &= \Delta dy / dy = dV / dy; \\ \varepsilon_z &= \Delta dz / dz = dW / dz, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де координати вектора переміщень можна визначити в такий спосіб: $U = x' - x$, $V = y' - y$, $W = z' - z$.

Тоді довжина деформованого відрізка в напрямку x дорівнює $dx\varepsilon_x = dx' - dx \Rightarrow dx' = dx (1 + \varepsilon_x)$. Аналогічно: $dy' = dy (1 + \varepsilon_y)$, $dz' = dz (1 + \varepsilon_z)$.

Сукупність лінійних деформацій у різних напрямках і кутових деформацій у різних площинах, що проходить через розглянуту точку, становлять деформований стан у точці тіла.

2 ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

2.1 Відомості про будівельні матеріали

До головних матеріалів, із яких виготовляються будівельні конструкції, належить сталь, алюміній і його сплави, залізобетон, деревина, пластмаси тощо.

Сталлю називають сплав заліза з вуглецем і головними домішками марганцю, кремнію (вуглецева сталь). Для поліпшення її властивостей сталь легують шляхом додавання хрому, нікелю, міді, молібдену, титану, ванадію, цирконію (легована сталь). Шкідливими домішками є сірка та фосфор.

Будівельні сталі застосовують переважно у вигляді прокатних профілів, листів; арматурні – у вигляді стержнів або дроту, одержуваного шляхом волочінням.

Алюміній і сплави відіграють другорядну роль і застосовуються в тих випадках, коли це економічно доцільно або неможливо застосування сталі. Алюміній легше за сталь майже в три рази, міцність його сплавів мало їй поступається, але модуль пружності також майже в три рази менше, що визначає велику його деформативність у конструкціях. Для будівельних конструкцій застосовують сплави алюмінію з міддю, марганцем, магнієм і цинком тощо.

Залізобетон – комплексний матеріал, що вдало сполучає два різнорідних матеріали: сталь і бетон. Тривала та надійна спільна робота сталі й бетону забезпечується через їхні фізико-механічні властивості, а також унаслідок виконання правил сполучення цих матеріалів (під час конструювання залізобетонних елементів).

Бетон добре опирається стиску і набагато гірше – розтягу. Тому у всіх залізобетонних конструкціях розтягнуті, а іноді й стиснуті від навантаження зони бетону посилюють сталлю, яка добре опирається розтягу-стиску.

Деревина – найдавніший будівельний матеріал. У головних елементах будівельних конструкцій використовують хвойну деревину, оскільки вона містить менше дефектів, ніж листяна деревина, а також містить смоли, що чинить кращий опір зволоженню та загниванню. З хвойної деревини найчастіше використовують соснову деревину. Серед листяних порід виокремлюється дубова деревина, що має підвищену міцність і стійкість проти загнивання, але більшу вартість.

Пластмаси. Конструкційні пластмаси використовують у складі елементів несучих і огорожувальних конструкцій. З найміцніших

склопластиків виконують елементи несучих конструкцій. Прозорі склопластики застосовують в елементах огорожувальних конструкцій будівель. Надлегкі пінопласти використовують у середніх прошарках легких покриттів і стін.

2.2 Експериментальні дослідження властивостей матеріалів

Щоб мати можливість судити про міцність конструкцій під час навантаження, потрібно вивчити головні властивості застосовуваних матеріалів і їхнє поведіння у разі збільшення навантаження аж до руйнування. Для цього зразки матеріалу випробують у лабораторії на спеціальних машинах.

Металеві зразки для випробування на розтяг виготовляють у вигляді стержнів круглого або прямокутного перерізу. Круглі зразки мають на кінцях стовщення (головки), а плоскі – поширення. Цими кінцями зразки закладають у захвати випробувальної машини, після чого розтягують. Для одержання порівняльних результатів випробувань певного матеріалу, зроблених на різноманітних зразках, необхідно, щоб зразки мали певні співвідношення розмірів. Ці співвідношення та самі розміри встановлені стандартом (ДСТУ 1497-84).

Зазвичай використовується циліндричний стандартний (нормальний) зразок (рис. 2.1). Діаметр перерізу d_0 такого зразка може бути взятий від 3 мм до 25 мм.

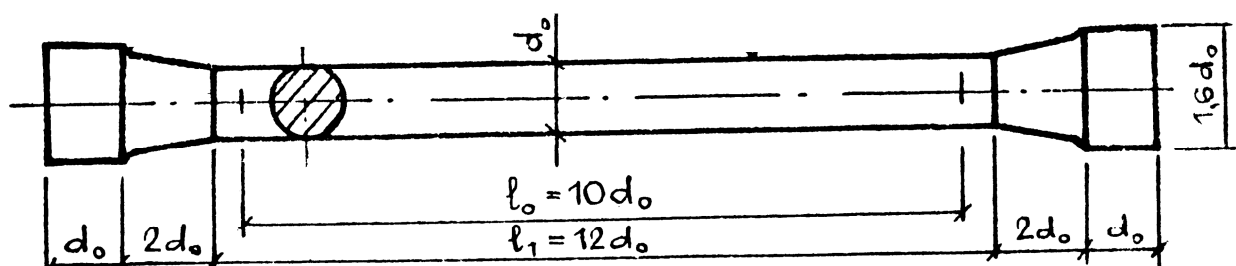


Рисунок 2.1

Розрахункову довжину l_0 на зразках помічають рисками. Ця довжина повинна бути меншою, ніж відстань між кінцівками, щоб виключити вплив способу прикладання зовнішніх сил і концентрації

напружень у місцях зміни перерізу. Зона цього впливу на підставі принципу Сен-Венана не перевищує меншого розміру перерізу.

Особливості поведінки зразка під час випробування на розтяг наочно ілюструються за допомогою діаграми розтягу – графіком залежності між навантаженням F та абсолютним подовженням $\Delta \ell$. Для маловуглецевої сталі вона має вигляд, наведений на рисунку 2.2.

На цій діаграмі можна відокремити три ділянки: лінійна OA ; горизонтальна CD і нелінійна $DMEK$.

На ділянці AB подовження $\Delta \ell$ пропорційне навантаженню F , тобто дійсний закон Гука так, що однаковим приростам ΔF навантаження відповідають однакові прирости $\Delta \ell$ подовження зразка. Величина $F_{\text{пц}}$ визначає навантаження, що відповідає границі пропорційності. Дуже близьке до нього значення $F_{\text{пр}}$, яке визначає границю пружної роботи матеріалу, тобто відсутні деформації пластичності.

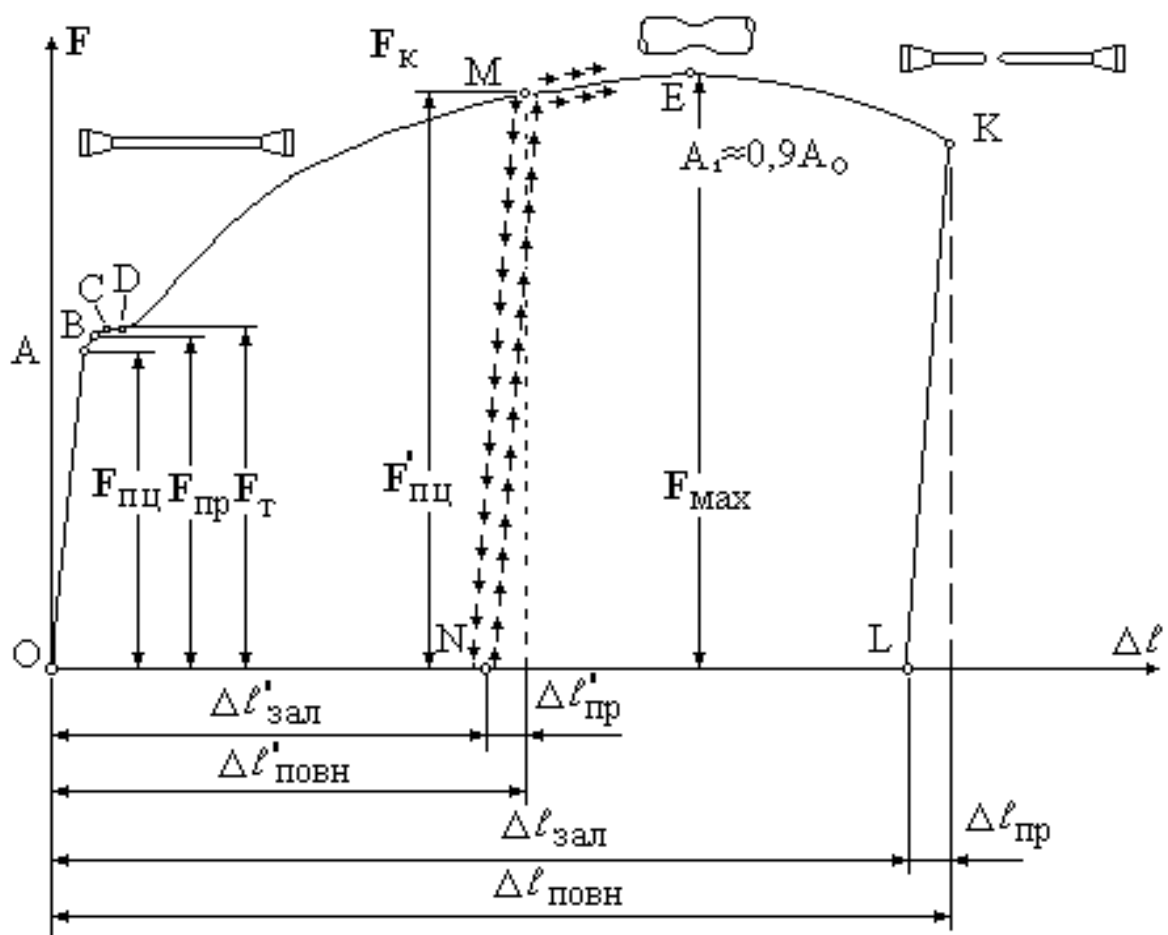


Рисунок 2.2

На ділянці CD подовження $\Delta \ell$ зростають при незмінному навантаженні. Таке явище, властиве пластичних матеріалів, називається текучістю. Текучість – критичний стан матеріалу, при якому підвищується температура, змінюється електропровідність, магнітні властивості, F_T – навантаження, що відповідає границі текучості матеріалу.

Коли зона текучості минає, навантаження знову зростає до найбільшого навантаження F_{\max} , після чого стрімко падає до миті розриву зразка (точки К). Падіння навантаження після досягнення F_{\max} обумовлене тим, що в цей час на зразку утворюється місцеве звуження – так звана шийка (рис. 2.3). Унаслідок цього несуча здатність зразка знижується. На рисунку 2.3: d – діаметр шийки.

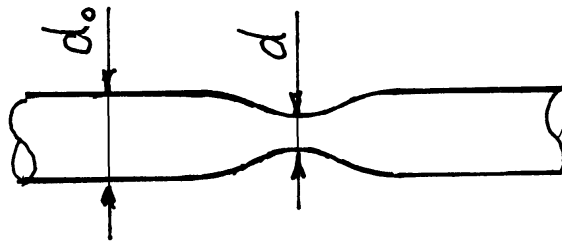


Рисунок 2.3

Надалі вся деформація зразка зосереджується в районі шийки, поперечний переріз істотно зменшується. Зона ЕК – зона локальної (місцевої) текучості.

Навантаження, необхідне для руйнування, зменшується. Точка К відповідає навантаженню F_K , при якому зразок руйнується. Отже, під час випробування зразка до руйнування ми одержуємо діаграму OABCDEK.

При цьому повна деформація $\Delta \ell_{\text{повн}}$, отримана зразком, складається з двох частин: пружної $\Delta \ell_{\text{пр}}$, що зникає після руйнування зразка, і залишкової $\Delta \ell_{\text{зал}}$.

Якщо зняти навантаження у точці М, то розвантаження відбудеться за прямою MN, рівнобіжною лінії лінійної пружності. При цьому пружна деформація $\Delta \ell'_{\text{пр}}$ зникне, а в зразку залишиться залишкова деформація $\Delta \ell'_{\text{зал}}$. Якщо відновити навантаження, то воно пройде по діаграмі NMEK. Якщо зразок витримати якийсь час, то навантаження піде трохи вище кривої MEK, оскільки за час так званого відпочинку матеріалу частина зв'язків між кристалами відновиться.

Порівнюючи діаграми OABCDMEK та NMEK, можна дійти висновку, що внаслідок попереднього пластичного деформування пружні

властивості матеріалу немовби змінюються, тобто навантаження, що відповідає новій границі пропорційності $F'_{\text{пц}}$, зростає ($F'_{\text{пц}} > F_{\text{пц}}$: матеріал зміцнюється). Явище підвищення пружних властивостей матеріалу внаслідок попереднього пластичного деформування називається наклепом. На практиці це явище широко використовується, оскільки збільшення міцнісних властивостей матеріалу збільшує його стійкість до дії зовнішніх навантажень (прокатка роликом шийок валів, застосування дрібоструминного наклепу тощо). Якщо явище наклепу небажане, то застосовують відповідні термічні операції (нагрів матеріалу до температури 800-900 °C). При цьому матеріал набуває свої первинні властивості.

Діаграма розтягу будується для певного зразка та її масштаб залежить від розмірів останнього. Потім на підставі цієї діаграми будують діаграму напружень. Залежність між напруженнями

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (2.1)$$

де A_0 – площа поперечного перерізу зразка, і відносним подовженням

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}. \quad (2.2)$$

Ця діаграма напружень (σ - ε) є характеристикою матеріалу безвідносно до розмірів зразка (рис. 2.4). Вона містить, декілька характерних точок:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0} \quad \text{– границя пропорційності (напруження, при якому}$$

порушується лінійна залежність між силою та деформацією);

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{A_0} \quad \text{– границя пружності (напруження, при якому з'являються}$$

деформації пластичності);

$$\sigma_{\text{Т}} = \frac{F_{\text{Т}}}{A_0} \quad \text{– границя текучості (напруження, які відповідають зоні}$$

текучості);

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{F_{\text{max}}}{A_0} \quad \text{– границя міцності (тимчасовий опір - напруження, які}$$

відповідають найбільшому навантаженню).

$S_k = \frac{F_k}{A_1}$ – дійсний опір (дійсне напруження) розриву (A_1 - площа поперечного перерізу шийки розірваного зразка).

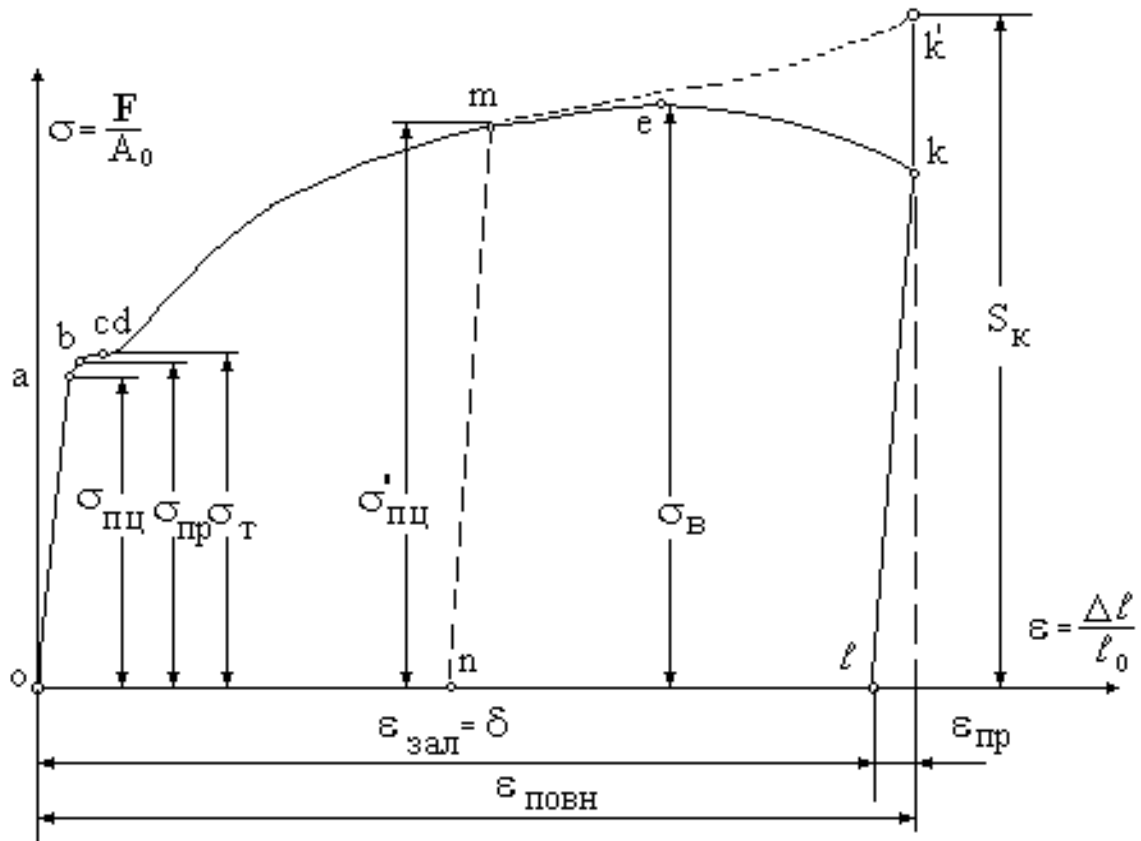


Рисунок 2.4

Іноді вводиться додаткова характеристика міцності: $\sigma'_{пц}$ – границя пропорційності матеріалу, отримана внаслідок попередньої пластичної деформації (наклепу).

Модуль пружності E , що характеризує пружні якості матеріалу, та справедливий коли напруження менше ніж границя пропорційності, визначають з формули для абсолютного подовження:

$$E = \frac{F\ell_0}{A_0\Delta\ell}, \quad (2.3)$$

де F – навантаження в границях пропорційності;
 ℓ_0 – база вимірювального приладу;
 $\Delta\ell$ – подовження бази, що відповідає навантаженню F .

Замість абсолютного значення F для визначення модуля пружності можна взяти приріст навантаження ΔF , а також приріст подовження $\delta\Delta\ell$:

$$E = \frac{\Delta F \cdot \ell}{A_0 \delta\Delta\ell}. \quad (2.4)$$

Чисельне значення модуля пружності E для найчастіше застосовуваних у будівництві матеріалів наведено у таблиці 2.1.

Якщо по кінцях прямого бруса прикладені сили, спрямовані вздовж його осі назустріч одна одній, то в брусі виникає стиск. Довжина бруса повинна бути більше ніж у п'ять-шість разів більшою за менший із його поперечних розмірів, щоб не виникало повздовжнього згинання.

Таблиця 2.1 – Значення модулю пружності

Матеріал	$E, \text{кН/см}^2$
Сталь прокатна	$(2 - 2,1) \cdot 10^4$
Чавун сірий (білий)	$(1,15 - 1,6) \cdot 10^4$
Алюміній та його сплави	$0,7 \cdot 10^4$
Мідь, латунь, бронза	$(1,0 - 1,3) \cdot 10^4$
Бетон	$(0,04 - 0,4) \cdot 10^4$
Цегельна кладка	$(0,001 - 0,078) \cdot 10^4$
Деревина у разі розтягу (стиску):	
- уздовж волокон	$(0,1 - 0,12) \cdot 10^4$
- поперек волокон	$(0,004 - 0,01) \cdot 10^4$

Випробуванню на стискання піддають короткі зразки зазвичай круглого або квадратного перерізу. Зразок поміщають між опорними плитами преса, що, зближуючись, стискають його (рис. 2.5). Але на результат досліду сильно впливає тертя, що виникає між основами зразка й опорними плитами преса. Стиснутий у поздовжньому напрямку зразок прагне розширитися в поперечних напрямках, проте у кінців зразка тертя перешкоджає такому розширенню.

Модуль пружності матеріалів зберігає ті самі визначення та позначення, що у разі розтягу.

Отже, відносно покоротшання:

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}, \quad (2.5)$$

де h_0 та h – висота зразка відповідно до та після експерименту.

Відносне поперечне розширення:

$$\psi = \frac{A - A_0}{A_0}, \quad (2.6)$$

де A і A_0 – площі перерізу зразка відповідно після та до експерименту.

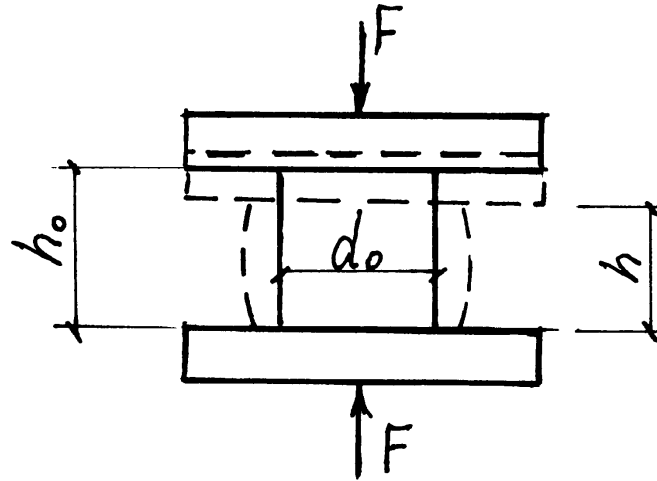


Рисунок 2.5

З діаграми стиску м'якої сталі (рис. 2.6) видно, що в початковому періоді навантаження, як під час розтягу, спостерігається пропорційність між силою і деформацією. Після досягнення навантаження, що відповідає границі пропорційності $F_{\text{мп}}$, лінійна залежність порушується: деформації зростають швидше, ніж навантаження. При подальшому збільшенні стискувальної сили зростання деформацій поступово стає повільним за рахунок збільшення перерізу зразка. Оскільки зразок під дією зростаючого навантаження поступово розплющується, визначити руйнівне навантаження неможливо. Тому випробування переривають при деякому навантаженні F_{max} , обмежуючись вивченням поведінки та характеру деформацій пластичної сталі при стиску.

Визначення напружень за формулою (2.1):

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F_{\text{max}}}{A_0}$$

дає дуже умовні величини через неоднаковість перерізів зразка вздовж висоти. Границю пропорційності під час стиску можна визначити так само, як і під час розтягу (2.1):

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{ст}}}{A_0}.$$

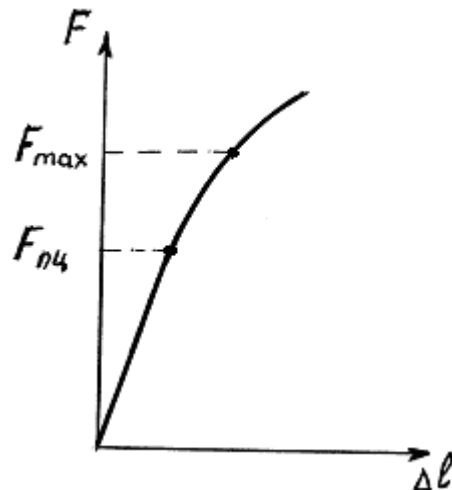


Рисунок 2.6

Випробування крихкого матеріалу (чавун) на стиск зазвичай проводять на зразках циліндричної форми з відношенням висоти до діаметра у межах $h/d = 1 \dots 2$ (рис. 2.7).

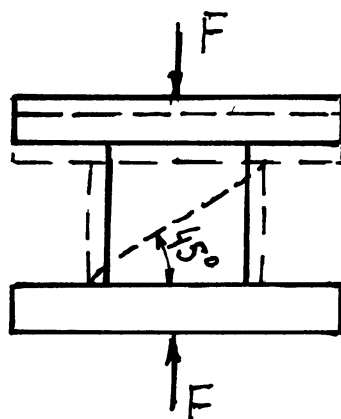


Рисунок 2.7

Для таких крихких матеріалів, як камінь та бетон зазвичай зразок беруть у вигляді куба. Крихкі матеріали (чавун, камінь, бетон тощо) на стиск працюють значно краще, ніж на розтяг, тому вони використовуються

саме в стиснутих елементах споруд. Отже, випробування на стиск для таких матеріалів є головними.

На початку дії навантаження діаграма стиску чавунного зразка дуже близька до прямої (рис. 2.8). У разі збільшення навантаження діаграма істотно викривляється, зростання деформацій випереджає зростання навантаження. Руйнування зразка відбувається миттєво у разі навантаження F_{\max} уздовж похилих площин (рис. 2.7), кут яких із віссю зразка становить $\approx 45^\circ$. Цей кут нахилу площин руйнування близький до кута нахилу найбільших дотичних напружень.

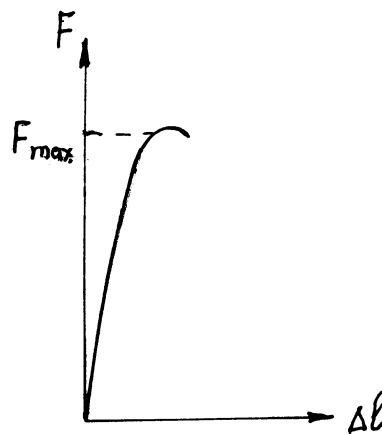


Рисунок 2.8

Стиснутий зразок змінює попередню циліндричну форму на бочкоподібну, що свідчить про наявність невеликих пластичних деформацій.

Границю міцності чавунна визначають за формулою (2.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

Відзначимо, що діаграми стиску та розтягу крихких матеріалів мають однакову форму, але границя міцності під час стиску ($50\text{--}100 \text{ кН/см}^2$) в декілька разів перевищує границю міцності під час розтягу ($21\text{--}32 \text{ кН/см}^2$).

Розглянемо стиск деревини, яка належить до анізотропних матеріалів. Величина опору деревини передусім залежить від того, як спрямоване навантаження відносно напрямку волокон: уздовж (рис. 2.9) або поперек (рис. 2.10). Випробування деревини на стиск зазвичай проводять на зразках кубічної форми.

У разі стиску вздовж волокон руйнування відбувається після вичерпання міцності твердих пластинок за умови порівняно невеликих деформацій. Як свідчить діаграма стиску (рис. 2.11), між навантаженнями та деформацією спостерігається пропорційність майже до руйнування.

Під час випробування на стиск поперек волокон (рис. 2.12) початок руйнування зразка помітити важко. Далі деревина ущільнюється, її опір збільшується, навантаження зростає. Тому за максимальне навантаження приймають або силу $F_{\text{пц}}$, що відповідає границі пропорційності, або близьку до неї F_{max} . Остання відповідає навантаженню в час припинення експерименту, коли висота зразка при стиску зменшується приблизно на 1/3 від свого початкового значення. У разі стиску поперек волокон руйнуються м'які шари зразка.

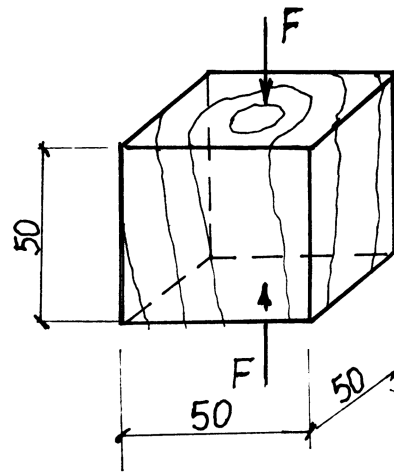


Рисунок 2.9

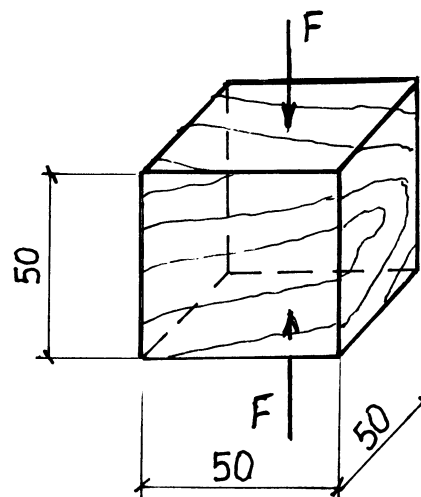


Рисунок 2.10

У результаті випробувань визначається границя міцності деревини (сосна) під час стиску її уздовж і поперек волокон за формулою (2.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_0}.$$

Границя міцності деревини під час стиску вздовж волокон приблизно в 10 разів більше границі міцності поперек волокон.

Міцність деревини залежить від її вологості. З підвищенням вологості опір деревини зменшується.

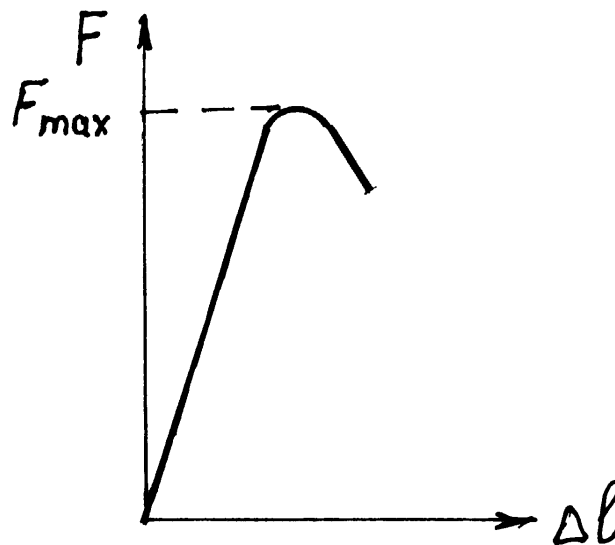


Рисунок 2.11 - Діаграма стиску деревини вздовж волокон

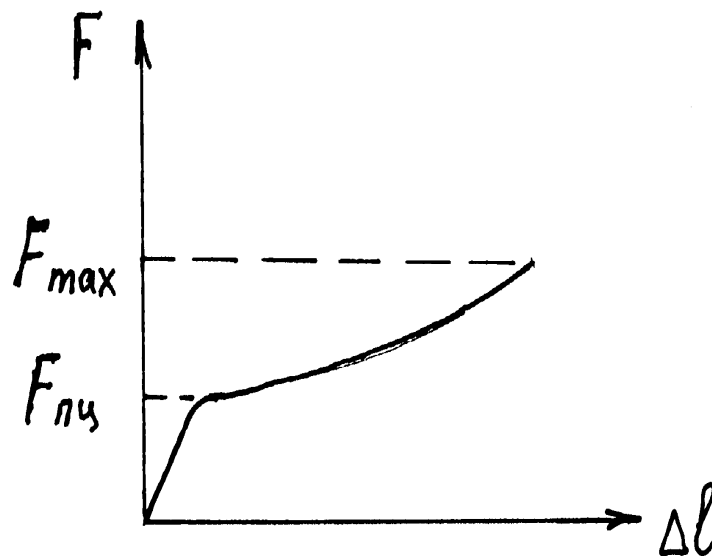


Рисунок 2.12 - Діаграма стиску деревини поперек волокон

2.3 Коефіцієнт поперечної деформації

Для розтягу використовують плоский сталевий зразок у вигляді смужки прямокутного перерізу. Щоб виключити вплив напруженого стану у місцях затиску зразка на показання тензометрів, вважають, що його довжина повинна у чотири-п'ять разів перевищувати ширину (рис. 2.13). Тут позначено: 1 – тензометр, який вимірює деформації вздовж напрямку дії навантаження (на поздовжній осі зразка), 2 – поперек дії навантаження.

Експериментально доведено, що у раз розтягу (стиску) сталевого стержня останній змінює свої розміри одночасно як у поздовжньому, так і в поперечному напрямках.

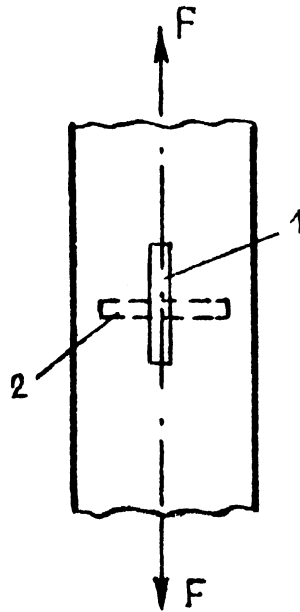


Рисунок 2.13

Під час розтягу поздовжні його розміри збільшуються, а поперечні – зменшуються. Здатність матеріалу до деформування характеризується відносними деформаціями:

$$\text{поздовжньою} \quad \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0},$$

$$\text{поперечною} \quad \varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_0},$$

де $\Delta \ell = \ell_1 - \ell_0$ – абсолютна поздовжня деформація, що визначається як різниця між довжиною ℓ_1 стержня під дією його навантаження і первісною довжиною ℓ_0 ;

$\Delta b = b_1 - b_0$ – абсолютна поперечна деформація, що визначається як різниця між шириною b_1 стержня при дії навантаження та первісною шириною b_0 .

Модуль виразу, одержаного шляхом поділенням відносної поздовжньої на відносну поперечну деформацію, називається коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.7)$$

Коефіцієнт Пуассона залежить винятково від пружних властивостей матеріалу і постійний для нього в границях лінійної пружності. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона цілком характеризують пружні властивості матеріалу. Чисельне значення коефіцієнту Пуассона для найчастіше застосовуваних у будівництві матеріалів наведено у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Коефіцієнт Пуассона

Матеріал	μ
Сталь прокатна	0,3
Чавун сірий (білий)	0,3
Алюміній та його сплави	0,31-0,35
Мідь, латунь, бронза	0,18
Бетон	0,16-0,2
Цегельна кладка	0,25
Деревина при розтягу (стиску)	
уздовж волокон	0,5
поперек волокон	0,02

2.4 Методи розрахунків конструкцій на міцність

Визначення напружень у конструкціях є основою розрахунків на міцність. Під час конструювання розміри елементів конструкції повинні бути такими, щоб під дією зовнішніх навантажень вона не руйнувалася, при цьому не рекомендовано допускати появи необоротних деформацій.

Під час деформування матеріалів, коли напруження не перевищують деяку величину, що називається границею пружності й позначається $\sigma_{пр}$, під час розвантаження тіло повністю відновлює свою форму та розміри (остаточні деформації не перевищують 0,02 %). Необоротні деформації з'являються під час деформування, коли напруження досягають деякої

величини, що називається границею текучості й позначається σ_T – це таке напруження, при якому деформування тіла здійснюється за умови незмінного зусилля. Руйнування настає в момент досягнення напруженнями свого максимального значення, що називається тимчасовим опором і позначається σ_{\max} . Для того щоб конструкції працювали надійно, напруження не повинні перевищувати небезпечних величин.

Метод допустимих напружень.

Під час деформування пластичних матеріалів небезпечним напруженням вважається границя текучості, для крихких – тимчасовий опір. Для крихкого матеріалу в момент руйнування деформації можуть бути невеликими. Але ці напруження не можуть бути прийняті як допустимі. Для того, щоб конструкції експлуатувалися в безпечних умовах, величину напруження необхідно зменшити у деякий спосіб. Для цього вводиться коефіцієнт запасу в такий спосіб: $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$, де $[\sigma]$ – допустимі напруження, тобто максимальні напруження, які можна допустити під час розрахунку конструкції, σ_0 – небезпечні напруження, n – коефіцієнт запасу міцності.

Небезпечні напруження (границя текучості чи тимчасовий опір) визначається опитним шляхом і є характеристикою матеріалу. Величина коефіцієнта запасу залежить від багатьох факторів – матеріалу, умов експлуатації, призначення конструкції.

Отже, умовою міцності елементів конструкції під час розрахунків буде таке співвідношення:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (2.8)$$

де σ – напруження, що виникає в елементах конструкції.

Незначне перевищення максимальних напружень над тими, що допускаються (до 5 %), не небезпечно.

Аналогічно вводиться умова міцності та для дотичних напружень:

$$\tau \leq [\tau], \quad (2.9)$$

де τ – дотичне напруження, що виникає в елементах конструкції.

Небезпечні напруження, як нормальні, так і дотичні, визначаються експериментальним шляхом, для цього досліджується розтяг-стиск та чистий зсув стержнів відповідно. Ці величини для різних матеріалів приводяться в довідниках. Зазвичай, для більшості конструкційних матеріалів спостерігається співвідношення

$$[\tau] = (0.5 \div 0.6)[\sigma].$$

Цей метод поки залишається головним для розрахунку вузлів і елементів будівельних конструкцій.

Умова міцності визначається:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.10)$$

де σ_{\max} – найбільше напруження, що виникає в одній з точок небезпечного перерізу конструкції й визначається шляхом розрахунку;

$[\sigma]$ – допустиме для даного матеріалу напруження, отримане на підставі експериментальних досліджень, з урахуванням коефіцієнта запасу.

Значення коефіцієнта запасу залежить від матеріалу, призначення споруди, характеру дії навантаження та інших умов експлуатації. Він встановлюється нормами проектування. Головними чинниками, що впливають на вибір його значення, є такі: відповідність механічних властивостей матеріалу конструкції й окремо випробуваних зразків; урахування конкретних умов роботи конструкції; ступінь точності методу розрахунку та завдання зовнішнього навантаження; довговічність та відповідальність проекрованої споруди.

Для будівельних сталей значення коефіцієнта запасу міцності приймається $n = 1,4 - 1,6$, для крихких – $n = 2,5 - 3,5$, для деревини – $n = 3,5 - 6$. Для деяких матеріалів значення допустимих напружень наведено у таблиці 2.3.

Метод руйнівних навантажень.

Метод допустимих напружень не завжди повністю характеризує умову руйнування конструкції загалом. У низці випадків за критерій руйнування доцільніше приймати граничне навантаження, що може витримати конструкція, не руйнуючись та істотно не змінюючи свою форму.

При цьому умова міцності, яка полягає у тому, що граничне або руйнівне навантаження не повинне перевищувати допустимого, має вигляд

$$F_{\max} \leq [F] = \frac{F_{\text{гран}}}{n}, \quad (2.11)$$

де F_{\max} – найбільше допустиме навантаження;

$[F]$ – допустиме для певної конструкції навантаження;

$F_{\text{гран}}$ – граничне або руйнівне навантаження;

n – коефіцієнт запасу міцності, приймається таким самими, як і в методі допустимих напружень.

Для статично визначених систем, у яких внутрішні зусилля можливо визначити тільки за допомогою рівнянь рівноваги, цей метод збігається з методом за допустимими напруженнями.

Таблиця 2.3 – Допустиме напруження матеріалів

Матеріал	Допустиме напруження, кН/см ²	
	Розтяг	Стиск
Сталь вуглецева легована	16 10-40	16 10-40
Чавун сірий	2.8-8	12-15
Мідь	3-12	3-12
Латунь	7-14	7-14
Бронза	6-12	6-12
Алюміній	3-8	3-8
Дюралюміній	8-15	8-15
Сосна уздовж волокон	0.7-1	1-1.2
Сосна поперек волокон	-	0.15-0.2
Дуб уздовж волокон	0.96-1.3	1.3-1.5
Дуб поперек волокон	-	0.2-0.35
Бетон	0.01-0.07	0.1-0.9
Камінь, цегла (кладка)	0.01-0.03	0.04-0.4

Імовірнісний метод розрахунку.

Чисельні експериментальні дані переконливо свідчать про те, що границя міцності, границя текучості, пружності та інші механічні характеристики матеріалів мають дуже значній розкид. Наприклад, під час визначення границі міцності бетону на стиск однакові результати не одержуються навіть тоді, коли зразки виготовлені з бетонної суміші одного замішування. Це можливо пояснити тим, що міцність бетону є функцією багатьох чинників. Тому природно вважати границю міцності та інші характеристики випадковими значеннями.

Аналогічна ситуація спостерігається і для інших будівельних матеріалів: сталі, деревини, цегли, алюмінієвих сплавів тощо.

Найповнішу інформацію про випадкове значення містить функція розподілу. Зазвичай в якості розподілу міцності матеріалу використовуються: нормальний закон Гауса, розподіл Гумбеля - Вейбула, розподіл Пірсона III-го типу та логарифмічний розподіл.

У цьому методі розрахунок на міцність зводиться до перевірки виконання умови

$$\sigma < R, \quad (2.12)$$

де R – границя міцності або текучості матеріалу.

Границя міцності матеріалу R і напруження, які діють у конструкції є випадковими величинами, тому потрібно вимагати, щоб ця умова виконувалася з достатньою ймовірністю, близькою до одиниці.

Для цього введемо випадкову величину

$$S = R - \sigma,$$

за допомогою якої умову міцності можна записати у вигляді:

$$S > 0. \quad (2.13)$$

Обернення S на нуль, тобто порушення умови (2.13) відповідає наступу граничного стану конструкції, а відповідно і її руйнуванню. При цьому ймовірність того, що величина S має додатне значення, називається можливістю безвідмовної роботи.

3 РОЗТЯГ І СТИСК

Центральним розтягом-стиском називається такий вид напружено-деформованого стану, коли в поперечному перерізі бруса виникає тільки повздовжня (розтягувальна або стискальна) сила, а всі інші силові фактори відсутні.

3.1. Повздовжня сила

Розглянемо деформування стержнів силою F , дія якої збігається з його віссю. На рисунку 3.1 зображені прямі стержні, закріплені з одного боку, а з іншого навантажені силою, спрямованою уздовж осі.

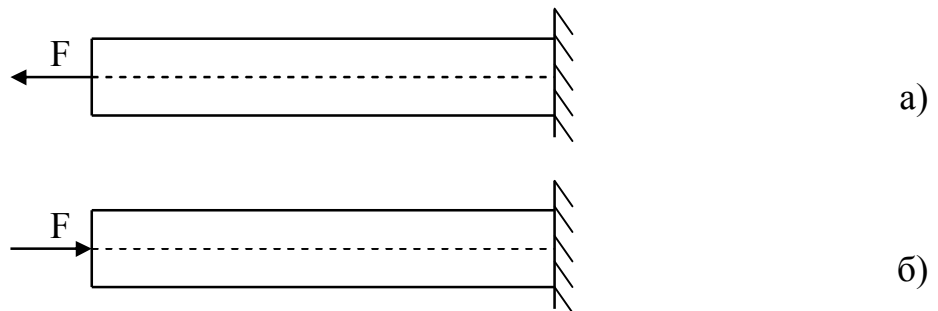


Рисунок 3.1

В усіх поперечних перерізах стержня виникають тільки повздовжні сили – що розтягують (рис. 3.1, а) чи стискають (рис. 3.1, б) його. Будемо вважати повздовжні сили, що розтягують – додатними, а що стискають – від’ємними.

Повздовжні сили відповідно до загального правила визначення внутрішніх зусиль, знаходять методом перерізів. Наприклад, розглянемо стержень, наведений на рисунку 3.2, а. Визначимо повздовжню силу N_1 у перерізі I-I стержня. Для цього розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини стержня, наведеної на рисунку 3.3:

$$\sum F_x = -F_1 + N_1 = 0,$$

звідси:

$$N_1 = F_1.$$

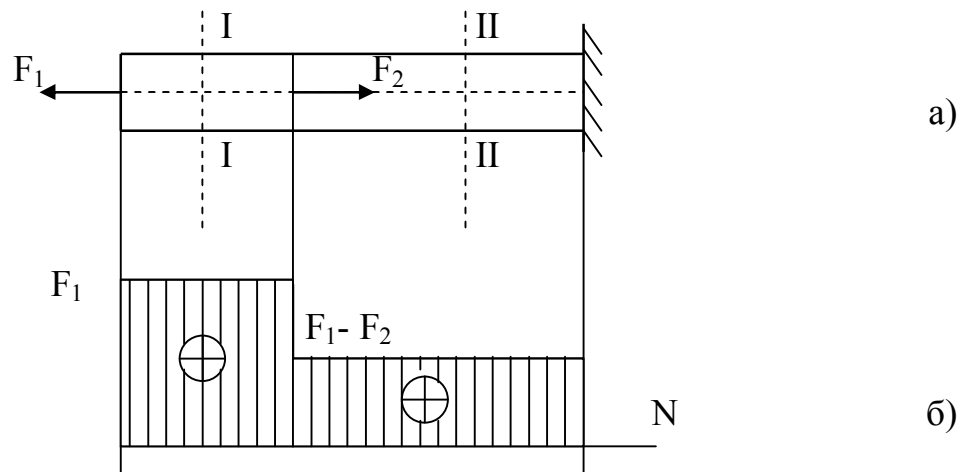


Рисунок 3.2

Напрямок внутрішніх сил показуються в припущенні, що вони є додатними, тобто що розтягують. Якщо в результаті розрахунків внутрішня сила додатна, стержень розтягується, від'ємна – стискається.



Рисунок 3.3

Для визначення внутрішнього зусилля у перерізі II-II стержня розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини:

$$\sum F_x = -F_1 + F_2 + N_2 = 0,$$

звідси:

$$N_2 = F_1 - F_2.$$

На рисунку 3.2, б наведена еюра поздовжніх сил N , побудована відповідно до загальних правил побудови еюр внутрішніх силових факторів (еюри побудовані в припущенні, що $F_1 > F_2$).

У перерізі, де уздовж осі прикладена зосереджена сила, значення повздовжньої сили буде мінятися стрибкоподібно. Якщо на ділянці стержня не має зовнішніх сил, поздовжня сила незмінюватиметься.

3.2 Напруження в стержнях при розтягу-стиску

Під час розрахунків на міцність, крім внутрішніх сил, що діють у перерізі необхідно визначати й напруження в різних точках перерізу.

Поздовжня сила, що виникає в поперечному перерізі стержня, є рівнодіючою внутрішніх нормальних сил, що діють на елементарних площадках, розподілених за площею перерізу. Вона пов'язана з

нормальними напруженнями співвідношенням (1.4). Для визначення напружень у кожній точці необхідно знати закон розподілу напружень по перерізу стержня.

Під час спостереження деформування стержня, навантаженого подовжніми силами, відзначено, що якщо нанести на його поверхню лінії, перпендикулярні до осі, то ці лінії після надання навантаження переміщуються паралельно первісному положенню, залишаються прямими і перпендикулярними до осі стержня. Якщо припустити, що аналогічна ситуація спостерігається й усередині перерізу, то можна зробити висновок, що поперечний переріз стержня, плоский до деформування, залишається плоским і після нього, переміщуючись поступально уздовж осі стержня. Це припущення називається «гіпотезою плоских перерізів». Якщо розглядати деформування стержнів у припущенні про однорідність матеріалу, то можна зробити висновок, що однаковим подовженням відповідають однакові напруження. Отже, напруження в поперечних перерізах усіх волокон рівні між собою і, отже, у всіх точках поперечного перерізу стержня.

Тому що величина напруження в поперечному перерізі не змінюється, то в співвідношенні (1.4) напруження можна винести з-під знака інтегрування:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A, \quad (3.1)$$

звідси (рис. 3.4):

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (3.2)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

Аналогічним чином визначають напруження і під час стиску, при цьому вони, так само як і подовжня сила мають від'ємну величину.

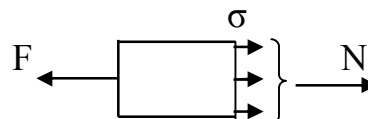


Рисунок 3.4

Отже, у поперечних перерізах стержня під час центрального розтягу чи стиску виникають рівномірно розподілені нормальні напруження, що дорівнюють відношенню повздовжньої сили до площі поперечного перерізу стержня.

При цьому необхідно вважати, що співвідношення (3.2) справедливе тільки для тих перерізів, що досить вилучені від місць прикладення зосереджених навантажень. Це впливає з принципу Сен-Венана. Біля

цих місць розподіл напружень відрізняється складністю і його опис вимагає точніших методів досліджень.

Визначимо тепер величини напружень, що виникають у похилих перерізах стержнів у разі розтягу-стиску. Розглянемо стержень, на який діють протилежно спрямовані сили, що розтягують. Проведемо переріз I-I під кутом α до поперечного перерізу, як зображено на рисунку 3.5, а, тобто проти годинної стрілки від напрямку сили.

Розглянемо рівновагу правої частини (рис. 3.5, б). Напрямок вектора напружень буде збігатися з напрямком дії сили, що розтягує, а його результуюча буде дорівнювати F . Оскільки, внутрішні силові фактори рівномірно розподіляються по перерізу, то абсолютна величина вектора напружень дорівнює:

$$p = \frac{F}{A_\alpha},$$

де A_α - площа перерізу I-I.

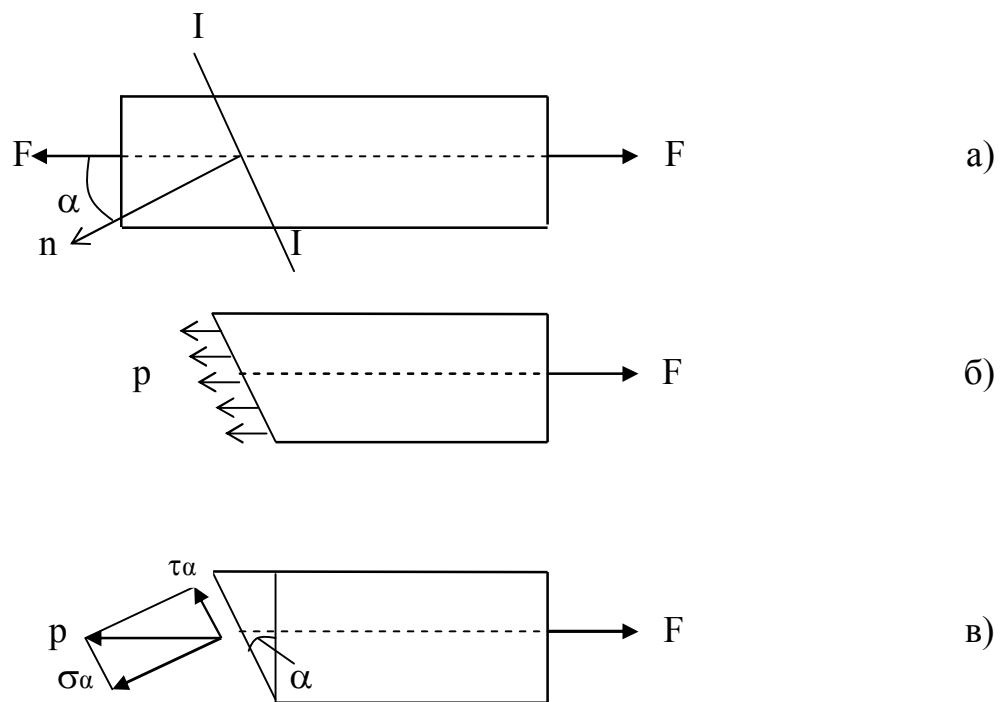


Рисунок 3.5

Нормальні напруження у поперечному перерізі знайдемо зі співвідношення (3.2):

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0},$$

де A_0 – площа поперечного перерізу.

Площа похилого перерізу

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha},$$

тоді:

$$p = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha}{A_0} = \sigma_0 \cos \alpha.$$

Вектор напружень становить рівнодіючу внутрішніх сил на елементарній площадці похилого перерізу площею ΔA_1 . Цю рівнодіючу можна розкласти на дві складові: нормальну і дотичну, як показано на рисунку 3.5,в. Ці складові є нормальними і дотичними напруженнями:

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad (3.3)$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.4)$$

Дотичне напруження вважається додатним, якщо його напрямок збігається з напрямком нормалі, поверненої на 90° по годинній стрілці.

Отже, у разі розтягу стержня подовжньою силою в ньому виникають одночасно нормальні й дотичні напруження та відповідні їм лінійні й кутові деформації. Вони будуть змінюватися залежно від кута нахилу перерізу. Визначимо максимальні значення компонентів напружень. З виразу (3.3) випливає, що максимальне значення нормального напруження досягається при $\alpha = 0^\circ$ і дорівнює:

$$\sigma_{\alpha \max} = \sigma_0. \quad (3.5)$$

Водночас, дотичні напруження в поперечному перерізі дорівнюють нулю, оскільки, згідно з (3.4):

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 0 = 0.$$

Максимальне за абсолютною величиною значення дотичних напружень буде на площадках, нахилених під кутом 45° до поперечного перерізу, і дорівнюватиме половині максимального нормального напруження:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 90^\circ = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.6)$$

Нормальні напруження в цих перетинах також, згідно з (3.3), будуть дорівнюють половині максимального нормального напруження:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cos^2 45^\circ = \sigma_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.7)$$

У поздовжніх перерізах (при $\alpha = 90^\circ$) напруження відсутні.

3.3 Деформації і переміщення

Під час навантаження тіла деформуються, тобто змінюють свою форму та розміри. Розглянемо деформацію стержня постійного поперечного перерізу (рис. 3.6) під дією силою F , що розтягує.

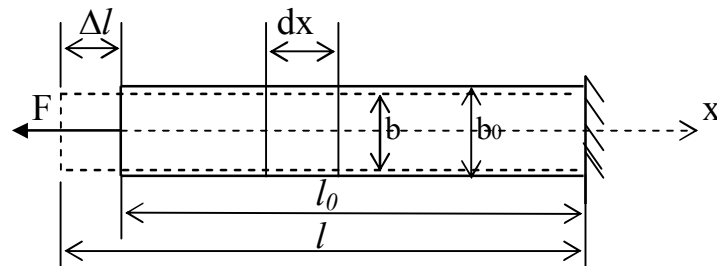


Рисунок 3.6

Під дією сили F стержень подовжиться на величину Δl , що називається абсолютним подовженням. Досвіди показують, що поки навантаження на стержень не досягає визначеної границі (напруження не досягнуть границі пропорційності, що є характеристикою матеріалу), абсолютна деформація прямо пропорційна до сили F , що розтягує, довжині стержня l і обернено пропорційна до площі поперечного перерізу A :

$$\Delta l = \frac{F l}{E A}, \quad (3.8)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, що є характеристикою матеріалу.

Цей коефіцієнт називається модулем пружності чи модулем Юнга. А сама формула (3.8) зветься «закон Гука».

Це співвідношення можна перетворити у відносних величинах:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.9)$$

де $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$ – відносна лінійна деформація.

Співвідношення (3.8) і (3.9) можна використовувати для визначення абсолютної та відносної повздовжньої деформації тільки в тому разі, якщо поперечна сила в стержні та площа перетину вздовж його постійні. Під час повздовжнього навантаження розподілена за довжиною стержня повздовжня сила може змінюватися. Крім того, стержень може бути виконаний у такий спосіб, що площа його поперечного перерізу буде змінною. У такому разі будемо вважати, що стержень складається з нескінченної кількості елементарних ділянок завдовжки dx (рис. 3.6). Оскільки на таких ділянках повздовжня сила та площа перерізу змінюються нескінченно мало, то до них можна застосувати закон Гука (3.8) у вигляді

$$\Delta dx = \frac{N dx}{EA},$$

де N – повздовжня внутрішня сила на ділянці dx .

Повна деформація стержня завдовжки l буде дорівнювати (якщо вважати, що він виконаний з ізотропного матеріалу) сумі подовжень усіх нескінченно малих елементарних ділянок:

$$\Delta \ell = \frac{1}{E} \int_{\ell} \frac{N dx}{A}. \quad (3.10)$$

Переміщення всіх точок перерізу у разі розтягу-стиску уздовж осі, відповідно до гіпотези плоских перерізів, будуть однакові і дорівнюють абсолютній зміні довжини ділянки стержня між цим перерізом і закріпленим кінцем. Це називається повздовжнім переміщенням і позначається U . Переміщення вважається додатними, якщо воно за напрямом збігається з віссю x і від'ємним, якщо воно відбувається в протилежному напрямку.

Повздовжнє навантаження стержнів, крім повздовжніх деформацій, спричиняє і поперечні деформації. Співвідношення між ними є сталими для кожного матеріалу. У разі розтягу поперечні розміри зменшуються, у разі стиску – збільшуються, як зображено на рисунку 3.6.

Поперечні деформації визначаються, у такий само спосіб, як і повздовжні. Абсолютною поперечною деформацією називається різниця поперечних розмірів після деформування та до нього:

$$\Delta b = b - b_0.$$

Відносна поперечна деформація дорівнює абсолютної поперечної деформації, поділеної на первісний розмір:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta b}{b_0}.$$

У разі розтягу поперечні деформації від'ємні, у разі стиску – додатні. Для ізотропних матеріалів відносна поперечна деформація у всіх напрямках однакова. Вона пов'язана з поздовжньою деформацією постійним відношенням (2.7):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \right|,$$

де μ – коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина, що характеризує властивості матеріалу, визначається експериментально та для більшості конструкційних матеріалів перебуває в межах $0.15 \leq \mu \leq 0.35$.

З урахуванням того, що знаки поздовжньої та поперечної деформації протилежні, можна записати формулу для визначення поперечної деформації:

$$\varepsilon_{\perp} = -\mu\varepsilon. \quad (3.11)$$

Крім того, унаслідок зміни температури в елементах конструкцій з'являються *температурні деформації*.

Температура впливає лише на лінійні розміри тіла, при цьому його форма остається незмінною, тобто можна вважати, що кутові деформації відсутні.

Лінійна деформація змінюється, згідно з експериментальними даними за формулою

$$\varepsilon = \alpha \Delta t, \quad (3.12)$$

де α – коефіцієнт лінійного поширення матеріалу;

$\Delta t = t - t_0$ – зміна температури відносно тієї, при якій споруда була змонтована (t_0).

Чисельне значення коефіцієнта лінійного поширення α для найчастіше застосовуваних у будівництві матеріалів наведено у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 - Коефіцієнт поширення матеріалу

Матеріал	α
Сталь прокатна	$(100 - 130) \cdot 10^{-7}$
Чавун сірий (білий)	$(80 - 140) \cdot 10^{-7}$
Алюміній та його сплави	$(240 - 260) \cdot 10^{-7}$
Мідь, латунь, бронза	$(160 - 220) \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(100 - 140) \cdot 10^{-7}$
Цегельна кладка	$(30 - 90) \cdot 10^{-7}$
Деревина	$(20 - 50) \cdot 10^{-7}$

3.4 Врахування власної ваги

Власна вага конструкції є зовнішнім навантаженням, що розподілене по всьому об'єму тіла. Під час розрахунку деяких конструкцій власною вагою не можна нехтувати.

Як враховується власна вага у разі розтягу-стиску стержнів, розглянемо на прикладі прямого стержня постійного поперечного перерізу великої довжини, закріпленого верхнім кінцем і навантаженого на вільному кінці розтягувальною силою F (рис. 3.7, а).

Визначимо поздовжню силу в поперечному перерізі на відстані x від краю (рис. 3.7, б). Тут $G(x)$ – вага відсіченої частини, $N(x)$ – внутрішня поздовжня сила, що виникає в цьому перерізі. З умови рівноваги знаходимо внутрішню силу:

$$N(x) = F + \gamma Ax,$$

де γ – питома вага матеріалу;

Ax – об'єм відсіченої частини стержня.

Це лінійна залежність поздовжньої сили від координати перерізу. Мінімальне значення буде при $x = 0$: $N(0) = F$, максимальне при $x = l$: $N(l) = F + \gamma Al$. Ці значення наведені на епюрі (рис. 3.7, в).

Нормальні напруження в перерізі на відстані x від краю визначимо, поділивши значення поздовжньої сили на площу перерізу. Зі співвідношення (3.2) знаходимо напруження в цьому перерізі:

$$\sigma(x) = \frac{F}{A} + \gamma x.$$

Це лінійна залежність нормального напруження від координати перерізу. Мінімальне значення напруження буде при $x = 0$: $\sigma(0) = \frac{F}{A}$, максимальне при $x = l$: $\sigma(l) = \frac{F}{A} + \gamma l$. Ці значення наведені на епюрі (рис. 3.7, г).

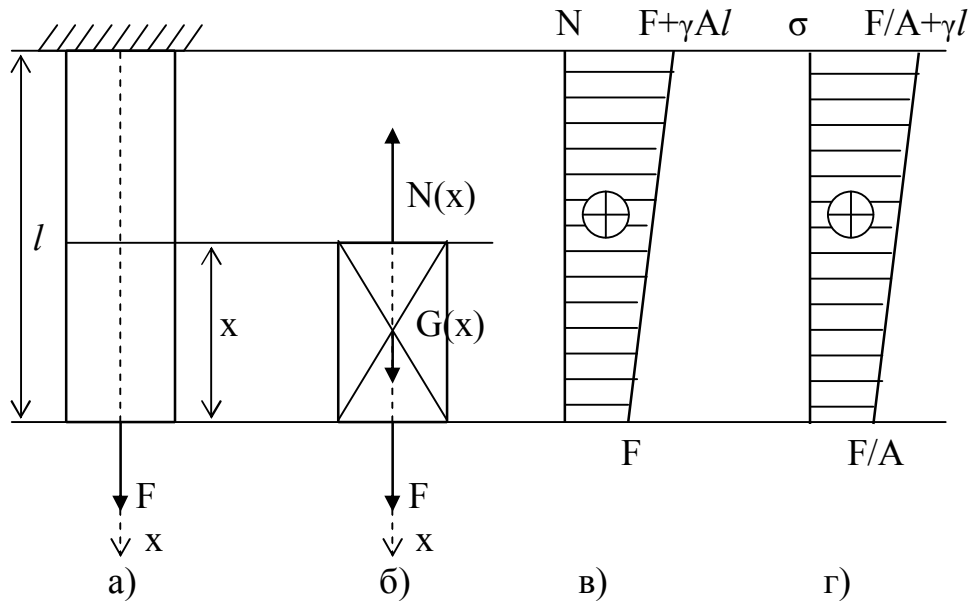


Рисунок 3.7

Чисельне значення питомої ваги матеріалу для найчастіше застосовуваних у будівництві матеріалів наведено в таблиці 3.2.

Визначимо тепер деформацію цього стержня. З (3.10) знайдемо абсолютну поздовжню деформацію стержня:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA} = \int_0^l \frac{Fdx}{EA} + \int_0^l \frac{\gamma x dx}{E} = \frac{F l}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

або:

$$\Delta l = \frac{N_{cp} l}{EA}, \quad (3.13)$$

де N_{cp} – середнє значення поздовжньої сили в стержні, дорівнює:

$$N_{cp} = F + \frac{\gamma A l}{2}.$$

У такий само спосіб, як і власна вага конструкції, під час розрахунків враховуються й інші об'ємні сили, наприклад, сили інерції.

Таблиця 3.2 – Питома вага матеріалу

Матеріал	γ , кН/м ³
Сталь прокатна	78
Чавун сірий (білий)	78-80
Алюміній та його сплави	27-32
Мідь, латунь, бронза	78-80
Бетон	50-60
Цегельна кладка	40-50
Деревина	7-9

3.5 Статично невизначені задачі

Стержні й стержневі конструкції, у яких внутрішні силові фактори від заданого навантаження можна визначити з рівнянь рівноваги, називаються статично визначними. Відповідно статично невизначеними називають стержні й конструкції, силові фактори в яких не можна визначити тільки з рівнянь рівноваги. Зусилля у стержнях статично визначних систем виникають тільки від зовнішніх навантажень. У статично невизначених стержнях і конструкціях внутрішні зусилля можуть виникати й за відсутності зовнішніх навантажень, наприклад, унаслідок зсуву опор чи неточності виготовлення різних елементів.

Усі статично невизначені системи мають додаткові, чи «зайві» зв'язки у виді закріплень чи стержнів. Зайвими такі зв'язки називаються тому, що вони не є необхідними для рівноваги чи геометричної незмінюваності системи. Наявність таких зв'язків обумовлюється експлуатаційними факторами чи умовами міцності конструкцій.

Для розрахунку статично невизначених стержнів і стержневих конструкцій необхідно скласти додаткові рівняння – рівняння спільності деформацій, що враховують особливості деформування системи під дією зовнішніх навантажень. Різниця між числом невідомих і числом рівнянь рівноваги визначає ступінь статичної невизначеності й відповідно число додаткових рівнянь, які необхідно скласти. Складання рівнянь спільності деформацій є найважливішим етапом у розв'язанні статично невизначених задач.

Як приклад розглянемо розрахунок статично невизначеного стержня, навантаженого подовжньої силою, наведеного на рисунку 3.8, а.

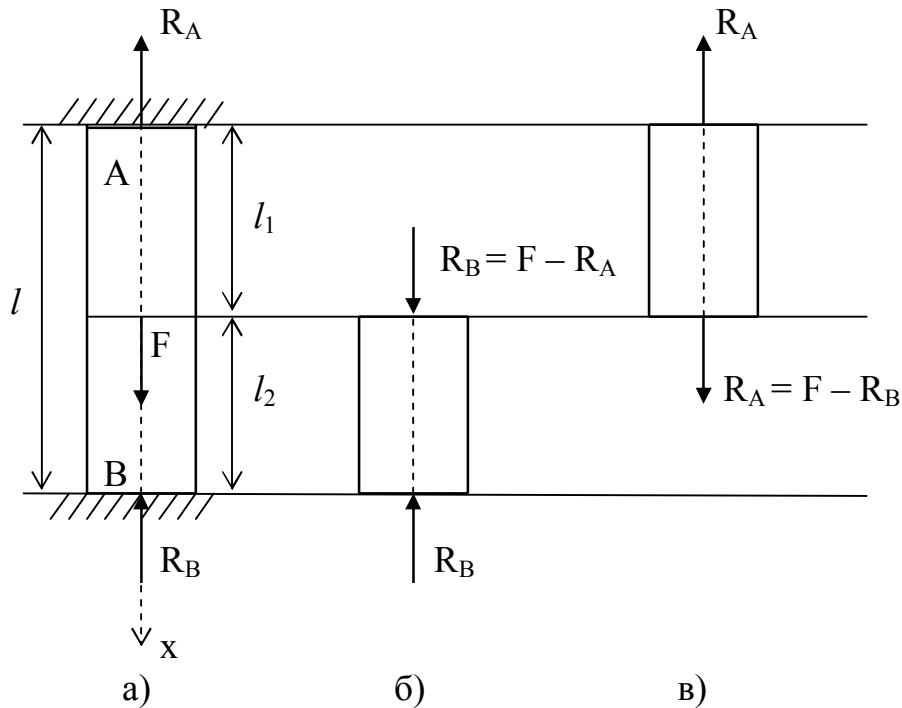


Рисунок 3.8

У розглянутому стержні всі навантаження діють уздовж осі стержня, тому на його закріплених кінцях будуть діяти тільки вертикальні складники реакцій R_A і R_B , як показано на рисунку. З рівняння рівноваги: $\sum F_x = 0$ одержуємо:

$$R_A + R_B = F.$$

У цьому рівнянні рівноваги дві невідомі сили, отже, задача один раз статично невизначена, і потрібно скласти одне рівняння спільності деформацій. Для цього розглянемо деформування приведенного стержня. Отже він з обох країв жорстко закріплений, те його сумарна абсолютна деформація буде дорівнювати нулю $\Delta l = 0$, а деформації кожної ділянки (рис. 3.8, б і рис. 3.8, в) запишемо за законом Гука (3.8):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{R_A \ell_1}{EA} - \frac{R_B \ell_2}{EA},$$

$$\frac{R_A \ell_1}{EA} - \frac{R_B \ell_2}{EA} = 0.$$

Це буде друге рівняння. Отже, для визначення реакцій опор R_A і R_B у нас є два рівняння з двома невідомими, з яких знаходяться невідомі сили:

$$R_A = \frac{\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} F; \quad R_B = \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} F.$$

Розглянемо ще один приклад розв'язання статично невизначених систем. На рисунку 3.9,а наведена розрахункова схема статично невизначеної стержневої конструкції.

Запишемо умову рівноваги вузла А. Оскільки це система сил, що сходиться, то рівнянь рівноваги можна скласти тільки два – суми проекцій усіх сил на осі x і y :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0; \\ \sum F_y &= N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - F = 0.\end{aligned}$$

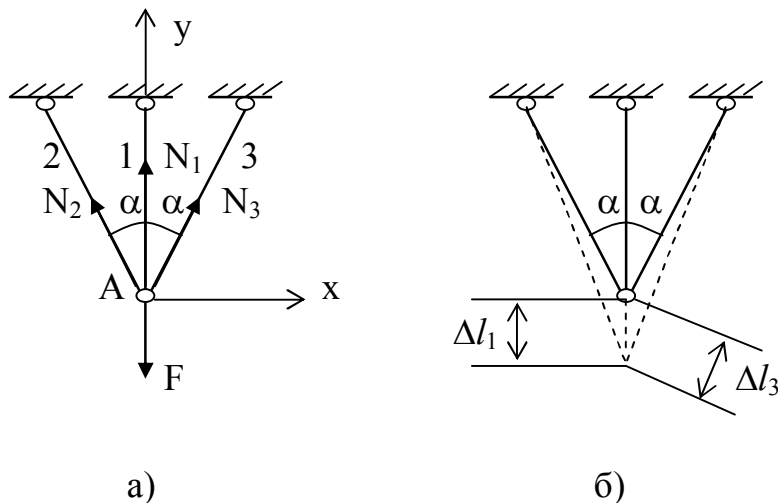


Рисунок 3.9

У цих двох рівняннях рівноваги три невідомих зусилля, отже, задача один раз статично невизначена, потрібно скласти одне рівняння спільності деформацій. Перетворимо рівняння рівноваги в такий спосіб: із першого рівняння виходить $N_2 = N_3$. З обліком чого друге рівняння можна подати у вигляді

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = F.$$

Отже, маємо одне рівняння з двома невідомими. Для того щоб одержати рівняння спільності деформацій, розглянемо деформування наведеної на рисунку конструкції. Оскільки система симетрична щодо осі середнього стержня, то вузол А під час деформування опуститься за вертикаллю на деяку величину (рис. 3.9, б). На таку ж саму величину подовжиться й середній стержень (на рисунку Δl_1), бічні стержні так само подовжаться на Δl_3 і займуть положення, зображене на рисунку штриховими лініями. Оскільки абсолютні деформації стержнів малі

порівняно з їхніми геометричними розмірами, то кути між стержнями в первісному й деформованому стані будуть відрізнятися незначно і можна одержати рівняння спільності деформацій, ураховуючи (3.8) у такий спосіб:

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha.$$

Запишемо деформації стержнів за законом Гука (3.8):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2}.$$

Підставимо ці деформації у попередній вираз:

$$\frac{N_1 \ell_1}{EA_1} \cos \alpha = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2}.$$

Отже, одержано рівняння спільності деформацій. Остаточно для визначення внутрішніх зусиль у стержнях маємо два рівняння з двома невідомими. Розв'язання їх дає:

$$N_1 = \frac{F \ell_2 A_1}{\ell_2 A_1 + 2 \cos^2 \alpha \ell_1 A_2};$$

$$N_2 = \frac{F \cos \alpha \ell_1 A_2}{\ell_2 A_1 + 2 \cos^2 \alpha \ell_1 A_2}.$$

3.6 Приклади розрахунків

Приклад 1.

Знайти поперечні розміри сталевого стержня, що стискається силою 100 кН (рис. 3.10, а). Напруження що допускаються, $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$. Поперечний переріз стержня становить прямокутник, у якого одна сторона у два рази більше іншої.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу лівої частини (рис. 3.10, б):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N + F = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$N = F.$$

Позначимо через b меншу сторону прямокутника, а через $h = 2b$ – велику сторону. Тоді площа поперечного перерізу буде $A = bh = 2b^2$.

З умови міцності (2.8) визначимо площу перерізу стержня:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{100}{16} = 6.25 \text{ см}^2.$$

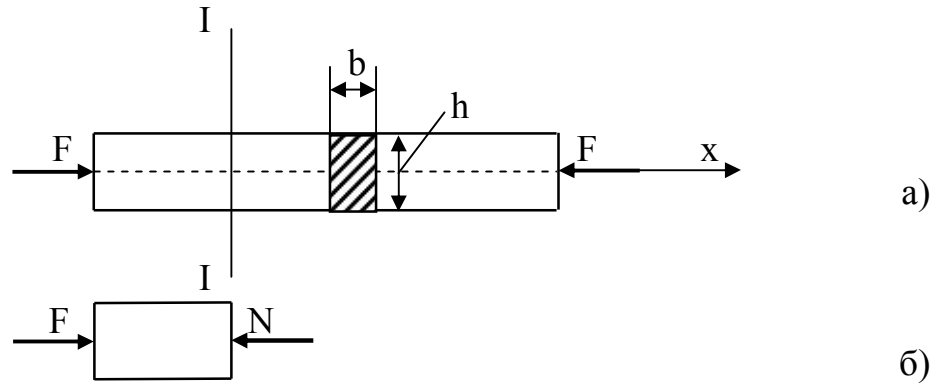


Рисунок 3.10

Далі одержуємо:

$$2b^2 = 6.25 \Rightarrow b = \sqrt{6.25 \cdot 2} = 1.77 \text{ см};$$

$$H = 2b = 2 \cdot 1.77 = 3.54 \text{ см}.$$

Відповідь: $b = 1.77 \text{ см}$, $h = 3.54 \text{ см}$.

Приклад 2.

Визначити розміри поперечних перерізів стержнів у конструкції, наведеної на рисунку 3.11. Стержні виконані зі сталі, $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$. Перший стержень має круглий поперечний переріз, другий – квадратний.

Розв'язання.

Задачу розв'язуємо методом перерізів. Розглянемо статичну рівновагу вузла В. На нього діють сили, зображені на рисунку.

Оскільки це система сил, що сходиться, то рівнянь рівноваги можна скласти тільки два:

$$\sum F_x = -N_1 \cos \alpha - N_2 = 0;$$

$$\sum F_y = N_1 \sin \alpha - F = 0.$$

Значення синуса та косинуса знайдемо як відношення відповідних катетів до гіпотенузи:

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0.8, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0.6.$$

Внутрішні сили в стержнях будуть:

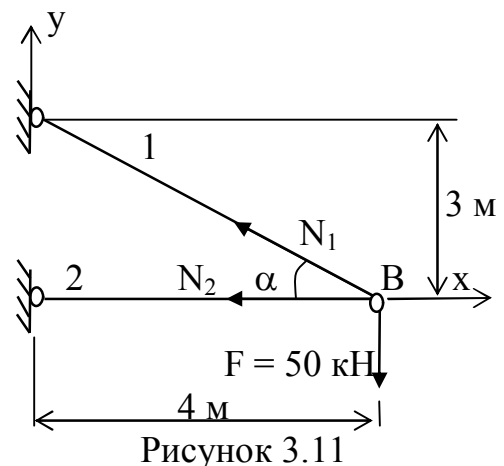


Рисунок 3.11

$$N_1 = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{50}{0.6} = 83.33 \text{ кН};$$

$$N_2 = -N_1 \cos \alpha = -83.33 * 0.8 = -66.67 \text{ кН}.$$

Перший стержень розтягається, другий – стискається.
З умови міцності визначимо площу перетину стержнів:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]},$$

Оскільки площа перерізу завжди додатна, то:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{83.33}{16} = 5.21 \text{ см}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{66.67}{16} = 4.17 \text{ см}^2.$$

Визначимо поперечні розміри стержнів. Перший стержень має круглий поперечний переріз діаметром d . Оскільки $A = \frac{\pi d^2}{4}$ тоді:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5.21}{3.14}} = 2.58 \text{ см}.$$

Площа квадрата дорівнює $A = a^2$, де a – сторона квадрата, тоді:

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{4.17} = 2.04 \text{ см}.$$

З урахуванням того, що напруження не повинні перевищувати припустимі, отримані розміри перерізів варто округлити до більшого значення.

Відповідь: $d = 2.6 \text{ см}$, $a = 2.1 \text{ см}$.

Приклад 3.

Визначити граничну довжину $l_{\text{гр}}$ вертикального мідного стержня, якщо допустимі напруження міді $[\sigma] = 10 \text{ кН/см}^2$, а питома вага $\gamma = 89 \text{ кН/м}^3$.

Розв'язання.

Максимальна поздовжня сила в стержні дорівнює його ваги. Вагу стержня визначимо, як добуток його об'єму на питому вагу:

$$N_{\text{max}} = V\gamma = \ell A\gamma,$$

де l – довжина стержня;

A – площа поперечного перерізу.

Максимальні напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{\ell A \gamma}{A} = \ell \gamma.$$

З урахуванням умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \ell \gamma \leq [\sigma] \Rightarrow \ell \leq \frac{[\sigma]}{\gamma} = \frac{10 \cdot 10^4}{89} = 1123 \text{ м},$$

де множник 10^4 необхідний для того, щоб перетворити напруження, що допускаються, у розмірність кН/м².

Відповідь: гранична довжина стержня $l_{\text{гр}} = 1123 \text{ м}$.

4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Під час навантаження конструкцій істотну роль у розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість грають геометричні розміри й форма поперечних перерізів її елементів. Розглянемо деякі геометричні характеристики перерізів, найчастіше використовувані під час розв'язання задач. Геометричні характеристики перерізів простої форми можна визначити за спеціальними формулами. Крім того, характеристики профілів стандартного прокату (двотаври, швелери, куточки) наведені в спеціальних таблицях сортаментів (див. додаток).

4.1 Площа перерізу

Площа є найпростішою характеристикою поперечного перерізу. Якщо представити переріз, що складається з незліченної кількості елементарних площадок dA , тоді площа всього перерізу можна визначити за допомогою співвідношення (рис. 4.1):

$$A = \int_A dA. \quad (4.1)$$

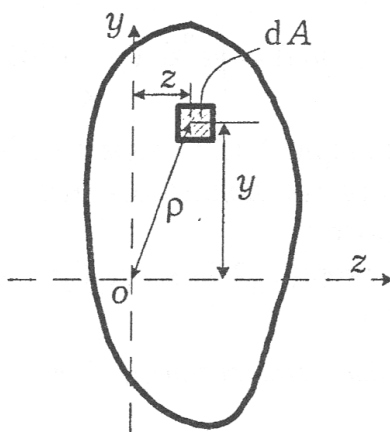


Рисунок 4.1

Властивості площі перерізу:

- 1) площа перерізу завжди додатна;
- 2) площа складеного перерізу дорівнює сумі площ фігур її складників;
- 3) площа перерізу не залежить від системи координат.

4.2 Статичні моменти перерізу

Статичним моментом перерізу відносно деякої осі називається взята по всій його площі сума добутків елементарних площадок на відстані від цієї осі, наприклад, у площині yz :

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA; \\ S_y &= \int_A z dA, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно (рис. 4.1).

Для складного перерізу, що складає з n частин, вирази (4.5) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA = \sum_{i=1}^n S_z^i; \\ S_y &= \int_A z dA = \sum_{i=1}^n S_y^i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де S_z^i, S_y^i – статичні моменти i -тої частини перерізу відносно осей z і y відповідно.

Отже, статичний момент складного перерізу щодо будь-якої осі дорівнює сумі статичних моментів усіх частин цього перерізу відносно цієї самої осі.

Визначаємо залежність між статичними моментами перерізу щодо двох рівнобіжних осей z і z_1 , розташованих на відстані a одна від одної. Вираз статичних моментів щодо цих осей можна зобразити у вигляді (4.2):

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA; \\ S_{z_1} &= \int_A y_1 dA, \end{aligned} \quad (4.4)$$

звідси:

$$S_{z_1} = \int_A (y - a) dA = \int_A y dA - \int_A a dA = S_z - aA.$$

Остаточно можна записати:

$$S_{z_1} = S_z - aA. \quad (4.5)$$

Аналогічно, можна розглянути дві рівнобіжні осі y і y_1 , розташовані на відстані b одна від одної. У цьому разі одержимо такий вираз:

$$S_{y_1} = S_y - bA. \quad (4.6)$$

Використовуючи співвідношення (4.5) і (4.6), можна знайти положення осей z_C і осі y_C , щодо яких статичні моменти дорівнюють нулю:

$$S_z - y_C A = 0 ; S_y - z_C A = 0$$

або

$$y_C = S_z / A ; z_C = S_y / A . \quad (4.7)$$

Точка перетинання таких осей називається центром ваги перерізу. Осі, що проходять через центр ваги, називаються центральними осями. Щодо будь-якої центральної осі статичний момент дорівнює нулю.

Якщо переріз складається з декількох фігур, то

$$S_z = \sum_{i=1}^n y_C^i A_i ; S_y = \sum_{i=1}^n z_C^i A_i , \quad (4.8)$$

де y_C^i і z_C^i – відстань до відповідних осей від центра ваги перерізу;

A_i - площа i -тої частини перерізу. Однак варто пам'ятати, що під час використання формул (4.8) необхідно враховувати знаки координат центрів ваги окремих частин цього перерізу.

Статичні моменти перерізу мають такі властивості:

- 1) статичний момент може бути як додатним, так і від'ємним. Крім того, він може дорівнювати нулю, якщо вісь проходить через центр ваги;
- 2) статичний момент складеного перерізу дорівнює сумі статичних моментів фігур її складників щодо відповідної осі;
- 3) статичний момент перерізу буде мінятися у разі зміни системи координат.

4.3 Моменти інерції перерізу

Осьовим, чи екваторіальним моментом інерції перерізу відносно деякої осі називають взятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї осі. Так, моменти інерції довільної фігури щодо осей z , y (рис. 4.1):

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A z^2 dA, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

Осьовий момент інерції складного перерізу щодо будь-якої осі дорівнює сумі відповідних моментів інерції всіх частин цього перерізу відносно цієї осі.

Полярним моментом інерції перерізу відносно деякої точки (зазвичай початок координат – перетинання осей y і z) називають узятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї точки:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.10)$$

де ρ – відстані до відповідної точки (рис. 4.1).

Порівнюючи співвідношення (4.9) і (4.10), можна встановити, що сума осьових моментів інерції будь-якого перерізу щодо двох перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції щодо точки їхнього перетинання.

Дійсно, відстань від будь-якої точки перерізу до початку координат можна визначити як

$$\rho^2 = y^2 + z^2.$$

Отже,

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA$$

або

$$I_p = I_y + I_z. \quad (4.11)$$

Співвідношення (4.11) справедливе для будь-яких двох взаємно перпендикулярних осей, отже при всіх можливих поворотах осей відносно началу координат, сума осьових моментів інерції залишається величиною постійною та дорівнює полярному моменту інерції.

Відцентровим моментом інерції перерізу щодо двох взаємно перпендикулярних осей називають узятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на відстані до цих осей. Так, у площині yz :

$$I_{yz} = \int_A zy dA, \quad (4.12)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

Залежно від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним, або дорівнювати нулю. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються головними

осями інерції. Головні осі, що проходять через центр ваги, називають головними центральними осями. Якщо хоча б одна з осей є віссю симетрії перерізу, то ці осі є головними.

Для визначення моментів інерції фігур, що мають просту геометричну форму, можна користатися методом безпосереднього інтегрування виразів (4.9), (4.10) і (4.12).

Осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються центральними осями, а моменти інерції відносно цих осей називаються центральними моментами інерції.

Розглянемо взаємозв'язок моментів інерції перерізу відносно центральних осей, і деяких інших, рівнобіжних їм.

Допустимо, що для якого-небудь перерізу осі y, z є центральними, відносно яких моменти інерції I_y, I_z відомі. Потрібно визначити моменти інерції перерізу відносно осей y_1, z_1 , рівнобіжних центральним, віддалених на відстані b та a (рис. 4.2). За визначенням, моменти інерції, щодо обох осей, знаходять у такий спосіб:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA; & I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA; \\ I_y &= \int_A z^2 dA; & I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA, \end{aligned} \quad (4.13)$$

Відстань від усіх елементарних площадок до осей y_1, z_1 буде: $y_1 = y + a, z_1 = z + b$ (рис. 4.2). Із співвідношень (4.13) одержимо:

$$I_{z_1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Перший доданок цього виразу є центральним моментом інерції I_z . Другий доданок дорівнює нулю, оскільки інтеграл, який у нього входить, є статичним моментом перерізу відносно осі, що проходить через центр ваги. Третій доданок дорівнює добутку квадрата відстані між осями та площі перетину. Отже, можна записати:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A. \quad (4.14)$$

Аналогічно для іншої осі:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A, \quad (4.15)$$

У такий саме спосіб можна одержати співвідношення для відцентрового моменту інерції:

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA. \quad (4.16)$$

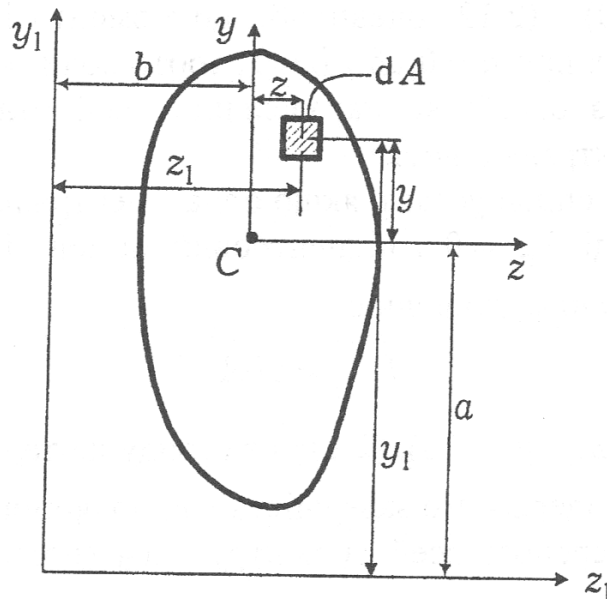


Рисунок 4.2

Розглянемо зміни моментів інерції під час повороту осей (рис. 4.3). Нехай відомі осьові й відцентрові моменти інерції довільного перерізу щодо координатних осей y і z (4.9), (4.10) і (4.12). Повернемо осі y і z на кут α проти годинникової стрілки, вважаючи кут повороту осей у цьому напрямку додатним, і знайдемо моменти інерції перетину щодо повернених осей:

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA; \quad I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1 z_1} = \int_A z_1 y_1 dA, \quad (4.17)$$

де y_1 і z_1 – координати елементарних частин цього перерізу в новій системі координат, які можна виразити через старі координати:

$$y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha;$$

$$z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

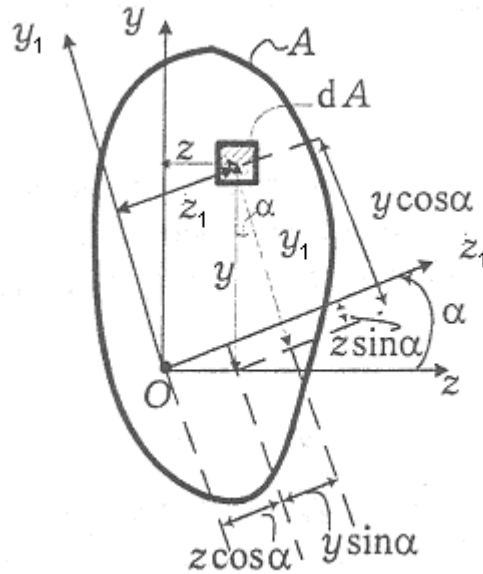


Рисунок 4.3

Підставимо ці вирази у співвідношення (4.17):

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\
 &= \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \sin 2\alpha \int_A yz dA; \\
 I_{z_1} &= \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA - \sin 2\alpha \int_A yz dA; \\
 I_{y_1 z_1} &= \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA = \\
 &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A yz dA + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA).
 \end{aligned}$$

З урахуванням (4.9) і (4.12), ці співвідношення можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\
 I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\
 I_{y_1 z_1} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ці формули дають змогу встановити, як змінюються величини моментів інерції перерізу під час повороту осей на деякий кут α . Для

деяких значень цього кута осьові моменти інерції будуть досягати максимуму чи мінімуму.

Зі співвідношення (4.11) випливає, що коли осьовий момент інерції відносно деякої осі є максимальним, то осьовий момент інерції щодо перпендикулярної осі є мінімальним, оскільки сума осьових моментів щодо двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції.

Для знаходження такого кута повороту осей, при якому значення осьових моментів інерції будуть екстремальними, дослідимо функцію I_{z_1} на екстремум по α :

$$\begin{aligned}\frac{dI_{z_1}}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}(I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha) = \\ &= -I_z 2 \sin \alpha \cos \alpha + I_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{yz} 2 \cos 2\alpha = \\ &= -(I_z - I_y) 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{yz} 2 \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Дорівнюємо далі цей вираз нулю при $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned}-(I_z - I_y) 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - I_{yz} 2 \cos 2\alpha_0 &= 0, \\ -(I_z - I_y) \sin 2\alpha_0 - I_{yz} 2 \cos 2\alpha_0 &= 0.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Тоді щодо кута α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}.\quad (4.20)$$

Отримане рівняння (4.20) значення кута α_0 визначає положення головних осей. Якщо кут α додатний, то систему координат потрібно повернути проти годинникової стрілки, щоб вона співпала з головними осями, якщо від'ємний – за годинниковою стрілкою.

Для визначення головних моментів інерції I_{\max} і I_{\min} розглянемо вираз (4.20), і, використовуючи тригонометричні перетворення, одержимо:

$$\begin{aligned}I_u = I_{\max} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right); \\ I_v = I_{\min} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right),\end{aligned}\quad (4.21)$$

де u і v – головні центральні осі, щодо яких момент інерції перерізу максимальний і мінімальний відповідно.

Головні осі інерції можна одержати для будь-якої точки, узятої у площині перерізу. Але у практичних розрахунках використовуються тільки

осі, що проходять через центр ваги перерізу. Такі осі називаються головними центральними осями інерції, а моменти відносно їх головними центральними моментами інерції.

Моменти інерції перерізу мають такі властивості:

1) осьові й полярні моменти інерції перерізів завжди додатні, відцентровий момент може бути як додатним, від'ємним, а відносно головних осей він дорівнює нулю;

2) моменти інерції складеного перерізу дорівнюють сумі моментів інерції фігур його складників;

3) осьові, полярні й відцентрові моменти інерції залежать від системи координат.

Розглянемо далі моменти інерції простих фігур.

Прямокутник (рис. 4.4), де b – ширина, h – висота прямокутника.

Розіб'ємо прямокутник на нескінченно малі елементи площі $b dy$. Момент інерції всього прямокутника відносно центральної осі z буде:

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.22)$$

Аналогічно відносно осі y :

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 h dz = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.23)$$

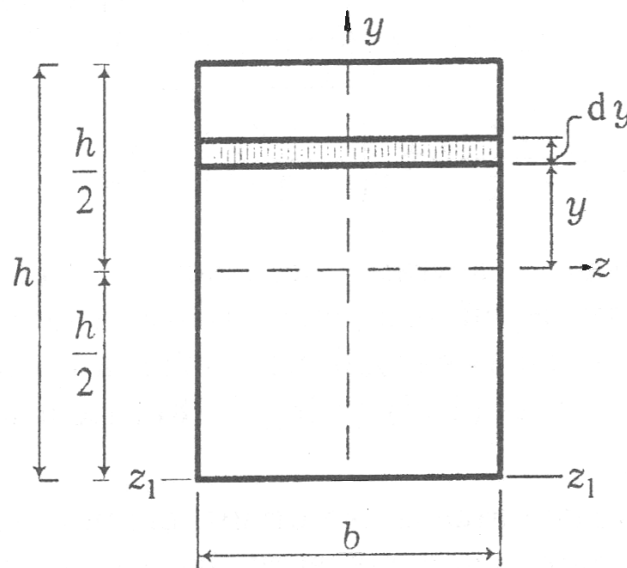


Рисунок 4.4

Для осі, яка не проходить через його центр ваги, скористаємось формулою (4.14). Наприклад, для осі z_1 :

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Трикутник (рис. 4.5), де b – основа, h – висота трикутника. По-перше, розглянемо момент інерції відносно осі z_1 , яка проходить через його вершину рівнобіжно основі. Розіб'ємо трикутник на нескінченно малі елементи площі $dy \frac{by}{h}$. Тоді

$$I_{z_1} = \int_0^h y^3 \frac{b}{h} dy = \frac{bh^3}{4}. \quad (4.24)$$

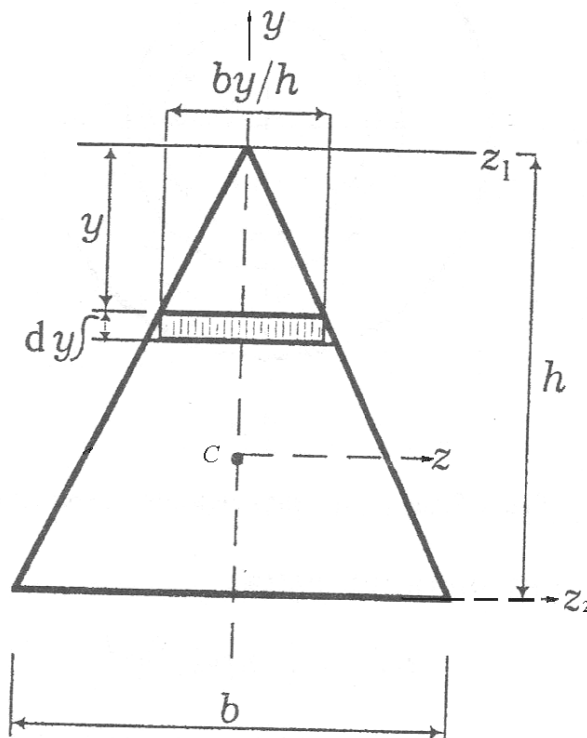


Рисунок 4.5

Для визначення моменту інерції відносно центральної осі z , скористаємось формулою (4.14):

$$I_z = I_{z_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \left(\frac{2}{3}h \right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \quad (4.25)$$

Також момент інерції відносно осі z_2 , яка проходить через його основу:

$$I_{z_2} = I_z + a^2 A = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \left(\frac{1}{3}h \right)^2 = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.26)$$

Коло. Для нього знайдемо спочатку полярний момент інерції відносно його центра ваги (рис. 4.6). Розглянемо нескінченно малі елементи площі $2\pi\rho d\rho$. Полярний момент інерції усієї площі кола буде:

$$I_p = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (4.27)$$

де $d = 2r$ – діаметр кола.

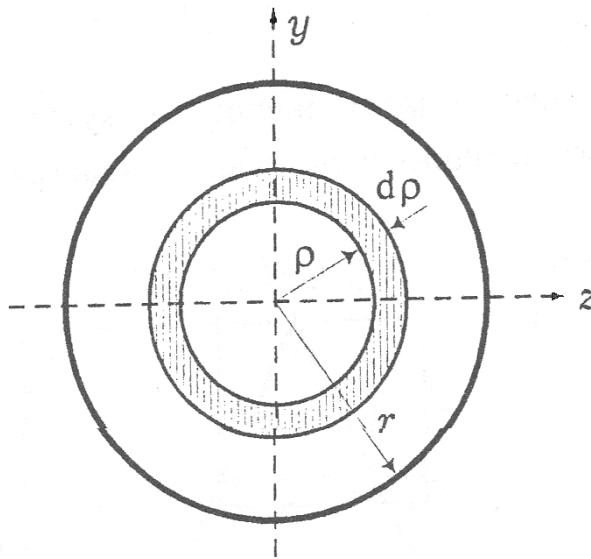


Рисунок 4.6

Використовуючи формули (4.11), а також ураховуючи те, що внаслідок симетрії $I_z = I_y$, знайдемо осьові моменти інерції:

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.28)$$

4.4 Приклади розрахунків

Приклад 1.

Визначити положення центра ваги перетину, показаного на рисунку 4.7. Геометричні розміри, приведені на рисунку, дорівнюють: $a = 4$ см, $b = 6$ см, $h = 3$ см.

Розв'язання.

Зображена на рисунку вісь y , є віссю симетрії, отже, вона проходить через центр ваги перерізу, тобто координата центра ваги $z_c = 0$. Для визначення координати y_c скористаємося формулою (4.7).

Площі простих фігур:

$$A_1 = ab = 4 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{ah}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ см}^2.$$

Положення центрів ваги окремих фігур відносно довільно проведеної горизонтальної осі z_0 (див. рисунок):

$$y_{C_1} = \frac{b}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ см};$$

$$y_{C_2} = b + \frac{h}{3} = 6 + \frac{3}{3} = 7 \text{ см}.$$

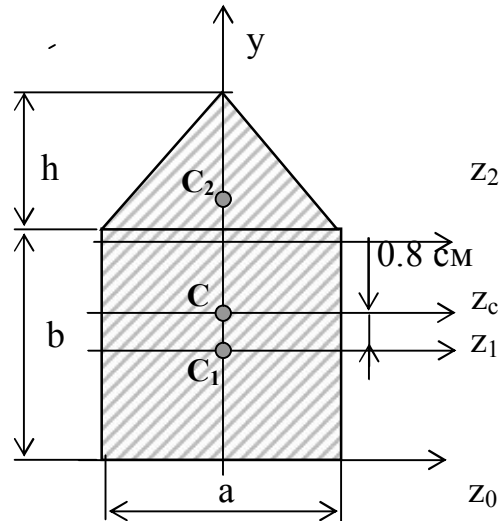


Рисунок 4.7

Остаточно враховуючи (4.7) і (4.8), знайдемо координату y_c центру ваги:

$$y_c = \frac{\sum S_{z_0}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{24 \cdot 3 + 6 \cdot 7}{24 + 6} = 3.8 \text{ см}.$$

Відповідь: центр ваги (точка C) перерізу співпадає з точкою перетину осей y_c z_c і має координати $(0; 3.8)$.

Приклад 2.

Визначити моменти інерції перерізу, показаного на рисунку 4.8 щодо осей z і y . $d = 5 \text{ см}$, $b = 8 \text{ см}$, $h = 12 \text{ см}$.

Розв'язання.

Зображені на рисунку осі z , y - проходять через центр ваги перерізу та є осями симетрії, отже, це головні центральні осі.

Для визначення осьових моментів інерції скористаємося формулами (4.22) і (4.23) та віднімемо з моменту інерції прямокутника момент інерції кола (4.28):

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} =$$

$$= \frac{8 \cdot 12^3}{12} - \frac{3.14 \cdot 5^4}{64} = 1121 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} - \frac{\pi d^4}{64} =$$

$$= \frac{8^3 \cdot 12}{12} - \frac{3.14 \cdot 5^4}{64} = 481 \text{ см}^4.$$

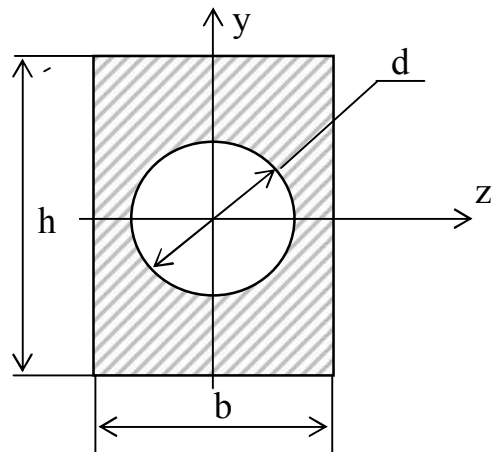


Рисунок 4.8

Відповідь: осьові моменти інерції перерізу щодо головних центральних осей z і y дорівнюють $I_z = 1121 \text{ см}^4$, $I_y = 481 \text{ см}^4$.

5 ЗГИН БАЛОК

Згин балок, обумовлений виникненням у поперечних перерізах згинальних моментів – моментів, щодо осі, розташованої у площині поперечного перерізу, що проходить через його центр ваги. Ці моменти діють у площині, перпендикулярній до поперечного перерізу балки.

Залежно від напрямку згинального моменту розрізняють прямий і косий згини. Прямий згин виникає у разі, коли дії згинальних навантажень збігається з однією із головних осей інерції. Тоді й згинальний момент у поперечному перерізі діє в площині, що проходить через одну з головних центральних осей інерції. На рисунку 5.1 наведений випадок навантаження бруса, коли зовнішні сили розташовані у площині ux , що збігається з головною віссю перерізу u . Деформації згину в цьому разі відбуватися в площині дії моменту.

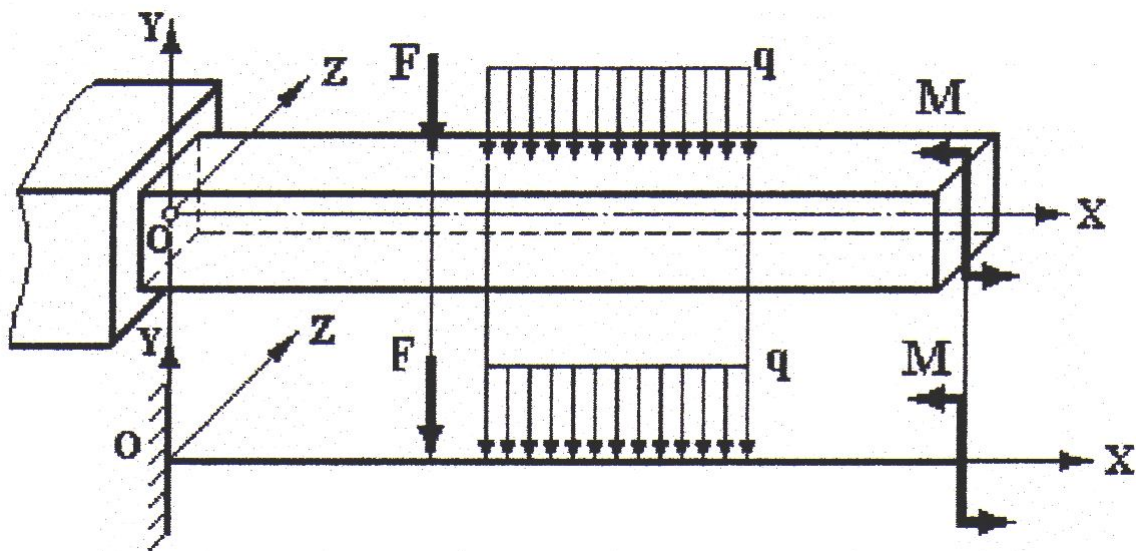


Рисунок 5.1

Якщо площина дії згинальних моментів не збігається з жодною з головних осей, то таке деформування називається косим згином. У таких випадках усі зовнішні навантаження (сили та моменти) розкладають на два складники, отже, косий згин розкладається на два прямі поперечні згини.

Якщо у разі згину в поперечному перерізі балки діє тільки згинальний момент, то таке деформування називається чистим згином. Коли, крім згинаючого моменту у поперечному перерізі діє ще і поперечна сила, тоді такий вид деформування називається поперечний згин. Коли всі поперечні перерізи деякої ділянки балки перебувають у стані чистого згину, тоді вся ця ділянка перебуває у стані чистого згину.

5.1 Внутрішні зусилля при згині

Зовнішні навантаження, що діють на елементи конструкції, викликають появу в ньому внутрішніх зусиль. Під дією на брус зовнішніх навантажень, розташованих в одній площині (наприклад, xy , якщо вісь x збігається з віссю бруса), що проходить через вісь бруса, у кожному поперечному перерізі виникають внутрішні зусилля, що діють у тій самій площині: поздовжня сила, поперечна сила та згинальний момент.

Коли в перерізі виникає поздовжня сила, тоді необхідно окремо розглядати дві задачі: розтяг-стиск та згин бруса, а потім одержати суперпозицію двох рішень. У такий само спосіб необхідно розглядати розв'язання двох окремих задач і у разі, коли зовнішні сили діють у площині, що не містить у собі головні осі.

Надалі ми будемо розглядати задачу прямого згину. У цьому разі в площині перерізу балки будуть такі внутрішні зусилля: поперечна сила, що діє в площині перерізу ($Q = Q_y$) і проходить через його центр ваги та згинальний момент, перпендикулярний до поперечного перерізу $M = M_z$, де z – вісь, щодо якої діє момент.

Згинальний момент M у поперечному перерізі бруса (рис. 5.2) вважається додатним, якщо на лівому торці правої частини балки він спрямований по годинниковій стрілці, а на правому торці лівої частини – проти годинниковій стрілки (або можна казати, що додатний момент є такий, який згинає балку нагору), як зображено на рисунку 5.2. У разі додатного згинального моменту верхні волокна будуть стискуватися, нижні – розтягуватися.

У разі від'ємного згинального моменту верхні волокна розтягуються, нижні – стискаються.

Поперечна сила Q додатна, коли на правому торці лівої частини бруса вона спрямована зверху вниз, на лівому торці правої частини – знизу догори, як зображено на рисунку.

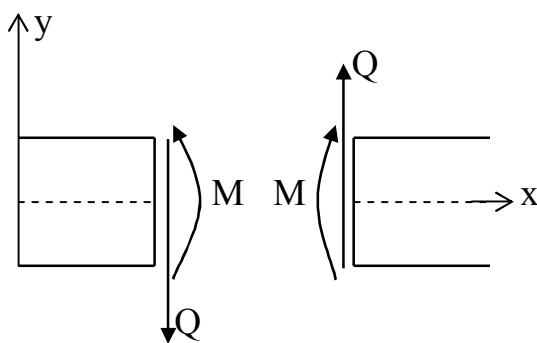


Рисунок 5.2

Додатна поперечна сила прагне завжди обернути відсічену частину балки за годинниковою стрілкою відносно центру ваги перерізу.

Згинальний момент і поперечна сила, що діють у перерізі, пов'язані з напруженнями, що виникають у ньому (1.4):

$$Q = Q_y = \int_A \tau_y dA;$$

$$M = M_z = \int_A \sigma_y dA.$$
(5.1)

Для того щоб визначити проекції на будь-яку вісь внутрішніх силових факторів у перерізі, необхідно, як наведено в п. 1.2, скористатися методом перерізів.

Проаналізуємо внутрішні силові фактори в поперечному перерізі балки у разі прямого поперечного згину, сформулюємо головні правила визначення сил і моментів під час згину.

Розглянемо консольний брус із затисненим правим торцем та навантажений силами F_1 і F_2 (рис. 5.3). Нехай $F_1 > F_2$.

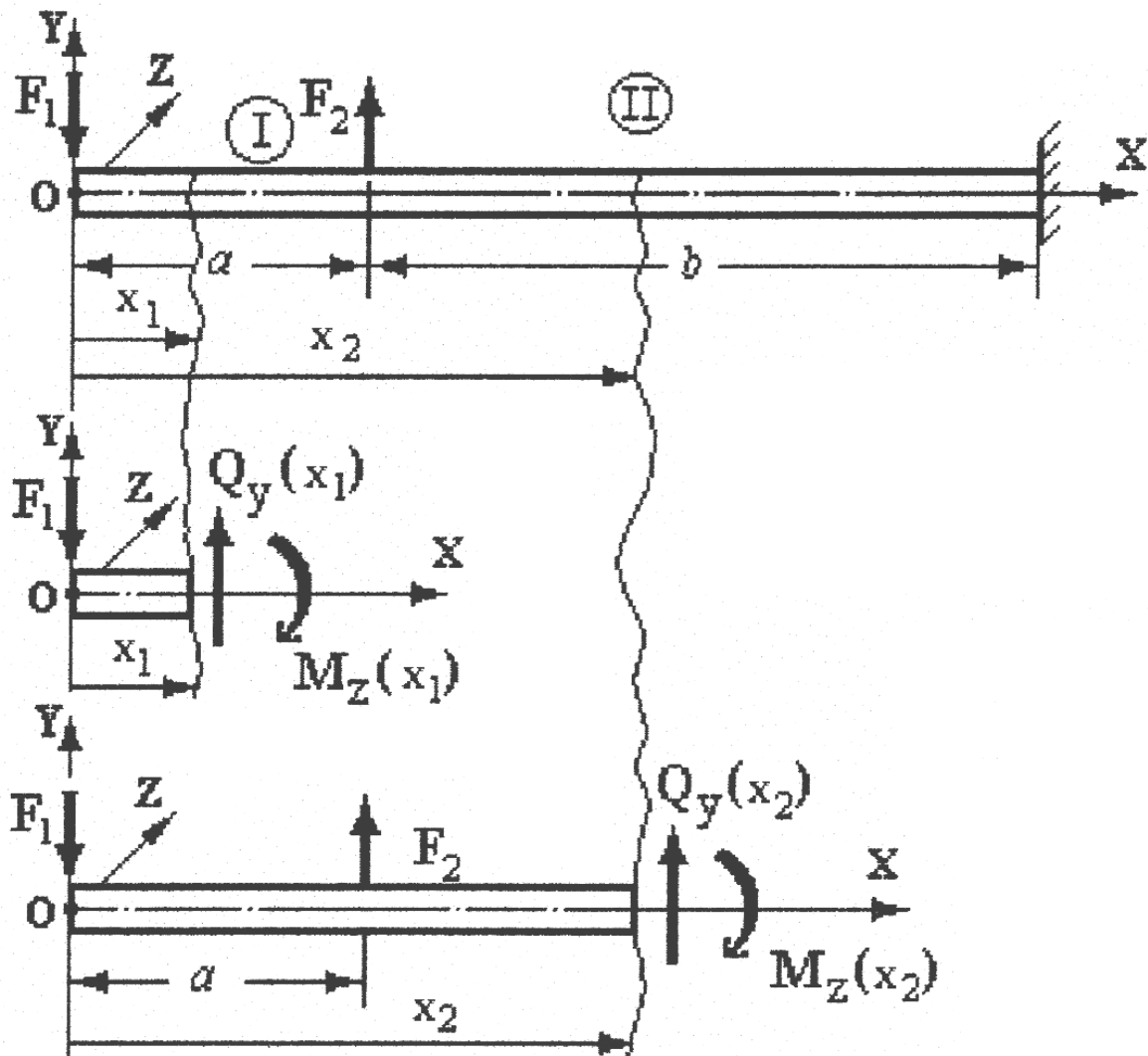


Рисунок 5.3

Згідно з методом виберемо переріз на першій і другій ділянках, покажемо відсічені частини, замінимо дію відкинутих частин на залишену внутрішніми силовими факторами Q_y і M_z . З умов статички (суми проекцій сил на вісь y і суми моментів щодо осі x , що проходить через центр ваги розглянутого перерізу) визначимо їхні значення:

1-а ділянка.

$$\begin{aligned}\sum F_i &= -F_1 + Q_y(x_1) = 0, \text{ звідки} & Q_y(x_1) &= F_1; \\ \sum M_i &= F_1 x_1 - M_z(x_1) = 0, \text{ звідки} & M_z(x_1) &= F_1 x_1.\end{aligned}$$

2-а ділянка.

$$\begin{aligned}\sum F_i &= -F_1 + F_2 + Q_y(x_2) = 0, \text{ звідки} & Q_y(x_2) &= F_1 - F_2; \\ \sum M_i &= F_1 x_2 - F_2(x_2 - a) - M_z(x_2) = 0, \text{ звідки} & M_z(x_2) &= F_1 x_2 - F_2(x_2 - a);\end{aligned}$$

З цього методу випливає, що для визначення внутрішніх зусиль у перерізі необхідно просумувати всі зовнішні сили та моменти, що діють на одну з частин, розташованих праворуч чи ліворуч від перерізу.

Використовуючи такі уявлення, сформулюємо такі правила для визначення поперечної сили й згинального моменту під час згину.

Поперечна сила $Q = Q_y(x)$ за величиною та знаком дорівнює сумі проекцій усіх зовнішніх сил, прикладених до лівої частини балки, на головну центральну вісь y площини згину, проведену в розглянутому перерізі, чи сумі проекцій на ту саму вісь, взяту зі зворотним знаком, усіх зовнішніх сил, прикладених до правої частини балки. При цьому проекції вважаються додатними, якщо сили спрямовані по осі (догори):

$$Q = \sum_{\text{лев}} F_y = - \sum_{\text{прав}} F_y. \quad (5.2)$$

Правило знаків. Поперечна сила вважається додатною, якщо обертає розглянуту відсічену частину балки щодо центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, і від'ємною - якщо проти годинникової стрілки (рис. 5.4).

Згинальний момент $M = M_z(x)$ щодо головної центральної осі z поперечного перерізу за величиною та знаком дорівнює сумі моментів щодо цієї осі від усіх зовнішніх навантажень, прикладених до лівої частини балки, чи сумі моментів щодо тієї самої осі, взятої зі зворотним знаком, усіх моментів від зовнішніх навантажень, прикладених до правої частини:

$$M = - \sum_{\text{лев}} M_z = \sum_{\text{прав}} M_z. \quad (5.3)$$

До того ж, моменти від зовнішніх навантажень вважаються додатними, якщо вони діють проти годинникової стрілки:

Правило знаків. Згинальний момент вважається додатним, якщо відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте внизу), та від'ємним – якщо навпаки (рис. 5.4). Звичайно, епюра згинальних моментів будується з боку розтягнутого волокна.

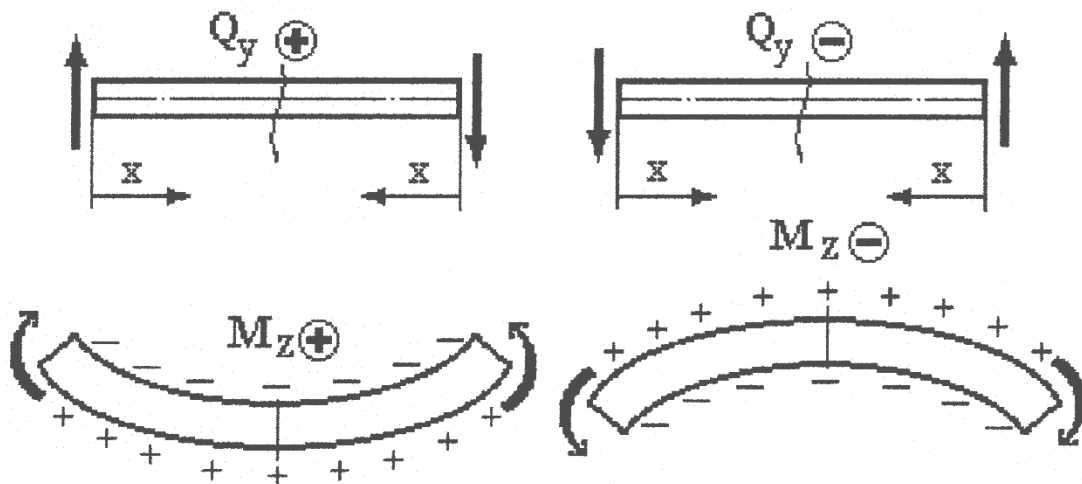


Рисунок 5.4

Для визначення внутрішніх зусиль моменти та проекції сил необхідно визначати від усіх зовнішніх сил, прикладених до балки по один бік від розглянутого поперечного перерізу. До цих сил необхідно включати і реакції опор, що виникають у закріплених точках перерізів. Ці реакції знаходяться з рівнянь рівноваги всієї балки з урахуванням усіх діючих на неї навантажень.

Балки, у яких загальне число реакцій більше числа рівнянь рівноваги, називаються статично невизначеними. Для таких балок реакції опор визначаються зі спільного розв'язання рівнянь рівноваги й рівнянь спільності деформацій, що описують умови деформування балок.

Величина внутрішніх зусиль у перерізах залежить від того, які та у який спосіб, прикладені навантаження, що діють на балку.

Для того щоб визначити ці залежності між зовнішніми навантаженнями та внутрішніми зусиллями, розглянемо балку (рис. 5.5), що перебуває під дією деякої системи сил.

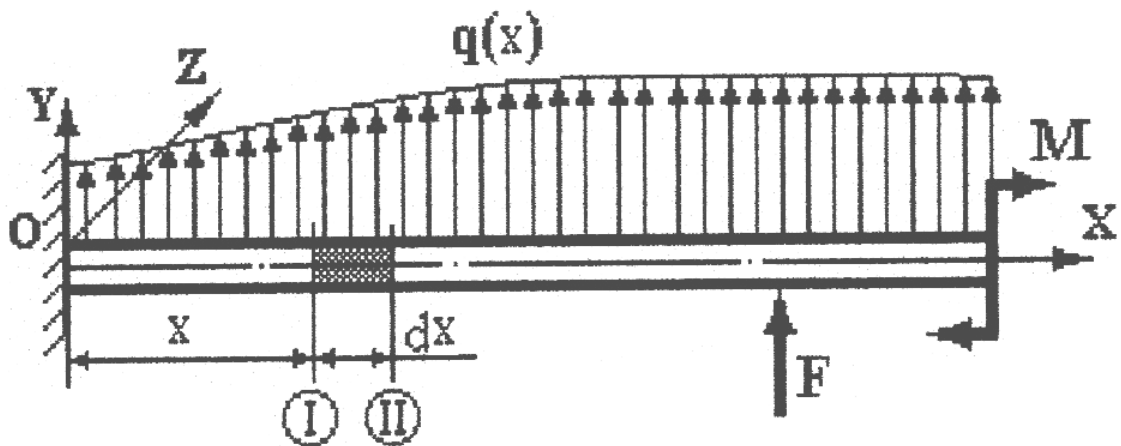


Рисунок 5.5

Виділимо елементарну ділянку балки завдовжки dx (рис. 5.6), на яку діє тільки розподілене навантаження інтенсивністю q , що діє перпендикулярно до осі балки, і внутрішні зусилля. Розглянемо її рівновагу, на лівий торець цього елемента діють деякі внутрішні зусилля M і Q , на правий $M + dM$ і $Q + dQ$, де dM і dQ – збільшення величин внутрішніх силових факторів на ділянці dx .

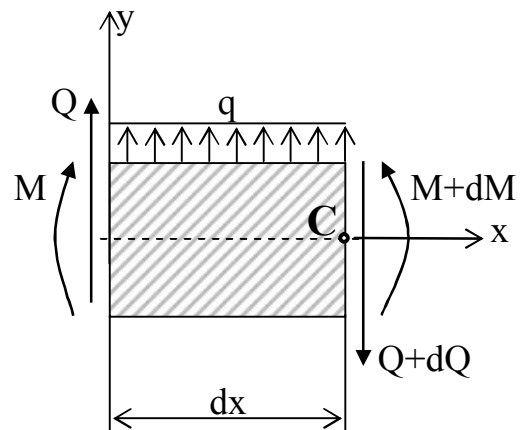


Рисунок 5.6

Цей елемент, як і вся балка загалом, повинен перебувати в рівновазі:

$$\sum F_y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow qdx - dQ = 0,$$

відкіля:

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (5.4)$$

Отже, похідна від поперечної сили по довжині дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Тепер складемо рівняння рівноваги елемента щодо центра ваги перерізу (точка C) правого торця елемента:

$$\sum M_C = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

або

$$Qdx + qdx \frac{dx}{2} - dM = 0.$$

Оскільки додток $qdx \frac{dx}{2}$ має другий порядок мализни, на відміну від інших додатків, що мають перший порядок мализни, ним можна знехтувати:

$$Qdx - dM = 0$$

або

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (5.5)$$

Отже, похідна від згинального моменту за довжиною дорівнює поперечній силі.

Підставляючи вираз (5.5) у залежність (5.4), одержуємо зв'язок другої похідної від згинального моменту за довжиною та інтенсивністю розподіленого навантаження:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (5.6)$$

Співвідношення (5.4) - (5.6), справедливі в тому разі, якщо вісь абсцис спрямована в правій бік.

Під час розрахунків балок на згин необхідно знати розподіл внутрішніх зусиль у поперечних перерізах за її довжиною. Цей розподіл прийнятий показувати у вигляді епюр. Епюри під час згину будуються за загальними правилами аналогічно епюрам подовжньої сили при розтягу-стиску. Кожна ордината епюри M чи Q становить собою величину згинального моменту чи поперечної сили у відповідному перерізі балки. При побудові епюри сил прийнято додатні значення сили відкладати догори від осі епюри, а від'ємні – відповідно донизу. При побудові епюри згинальних моментів, навпаки – додатні значення відкладаються вниз, від'ємні – нагору.

Вид епюр поперечної сили та згинального моменту залежить від виду зовнішнього навантаження. Аналізуючи залежності (5.2) - (5.6) можна зробити такі висновки, які можна використовувати для побудови й перевірки епюр:

1. У перерізі, до якого до балки прикладена зосереджена сила, значення поперечної сили Q зміниться стрибкоподібно на величину прикладеної

сили. Коли зосереджена сила спрямована нагору, на епюрі Q є стрибок догори, а коли сила спрямована вниз – стрибок униз.

2. Якщо до балки прикладений зосереджений момент, значення згинального моменту M зміниться стрибкоподібно на величину прикладеного моменту. Коли зосереджений момент спрямований проти годинникової стрілки, на епюрі M має стрибок догори, а коли момент спрямований за годинниковою стрілкою – стрибок униз.

3. Тангенс кута між дотичною до лінії, що обмежує епюру моментів M і віссю епюри, дорівнює поперечній силі Q .

4. На ділянках балки, на яких поперечна сила додатна, згинальний момент зростає, а де вона від'ємна – убыває.

5. Чим більше за абсолютною величиною значення поперечної сили, тим крутіше лінія, що обмежує епюру згинальних моментів.

6. На ділянці балки, де поперечна сила має постійне значення, епюра моментів обмежена прямою лінією.

7. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили не має стрибка, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох боків, сполучаються без перелому, тобто мають у точці сполучення загальну дотичну.

8. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили має стрибок, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох сторін мають точку перелому, тобто не мають у точці сполучення загальної дотичної.

9. На ділянках, де діє зовнішнє розподілене навантаження, згинальний момент досягає максимуму чи мінімуму в перерізах балки, де поперечна сила дорівнює нулю (дотична до лінії, що обмежує епюру моменту, при цьому в розглянутому перерізі буде рівнобіжна осі епюри).

10. На ділянках, де діє розподілене навантаження, поперечні сили змінюються за довжиною балки по прямій, а епюри моментів обмежені кривою лінією.

11. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, поперечні сили постійні, а епюри моментів змінюються за лінійним законом.

5.2 Напруження та деформації при згині

Розглянемо нормальні напруження, що виникають у разі чистого згину в поперечному перерізі балки. З усіх внутрішніх зусиль, що можуть виникати в перерізах, ненульовим буде тільки згинальний момент, щодо осі, перпендикулярної до осі балки. Цей момент буде пов'язаний з нормальними напруженнями співвідношенням (5.1).

Розглянемо, як деформується балка в умовах чистого згину. Досвіди дослідження деформацій при згині балок свідчать про таке:

- 1) подовжні лінії викривляються по дузі кола;
- 2) поперечні лінії залишаються прямими та при цьому не змінюють свою довжину;
- 3) контури поперечних перерізів балки залишаються плоскими;
- 4) подовжні та поперечні лінії скрізь перетинаються під прямим кутом.

На підставі цих спостережень можна зробити висновок, що у разі чистого згину поперечні перерізи балки залишаються плоскими та повертаються так, що залишаються нормальними до вигнутої осі балки (рис. 5.7). Отже, при згині, як і при розтягу-стиску, справедлива гіпотеза плоских перерізів, що має назву «гіпотеза Бернуллі».

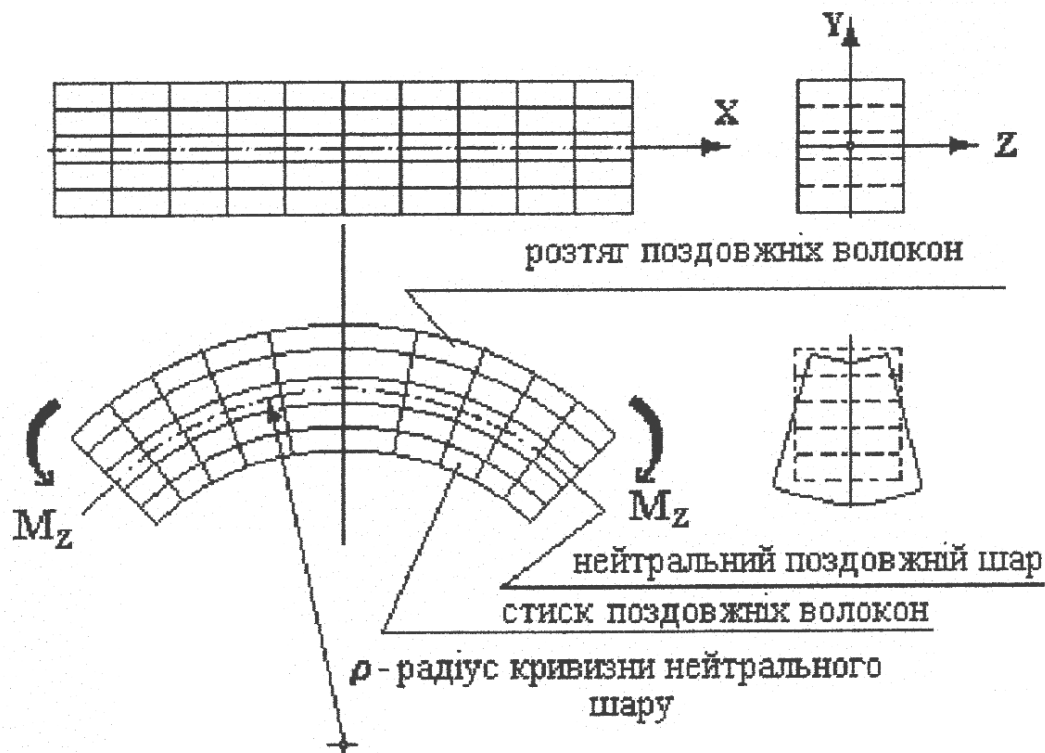


Рисунок 5.7

Дослідження деформування балок в умовах згину показує, що у разі навантаженні балки від'ємними згинальними моментами верхні волокна балки подовжуються, нижні – коротшають, додатними – навпаки. При цьому можна знайти волокна, довжина яких залишається незмінною. Сукупність таких волокон утворить деякий шар, що називається

нейтральним. Кожен поперечний переріз перетинається з нейтральним шаром по прямій, що називається нейтральною лінією перерізу.

У разі плоского згину нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, отже, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії у перерізі, при цьому вона перетинає центр ваги перерізу. Отже, нейтральна лінія збігається з головною центральною віссю перерізу та називається нейтральною віссю.

Використаємо гіпотезу плоских перерізів для визначення нормальних напружень у разі чистого згину для балки на рисунку 5.8. Для цього виділимо елемент, обмежений двома поперечними перерізами, на відстані dx (рис. 5.9,а). Торцеві перерізи під час деформування залишаються плоскими та при цьому повернуться на деякий кут $d\varphi$ (рис. 5.9, б).

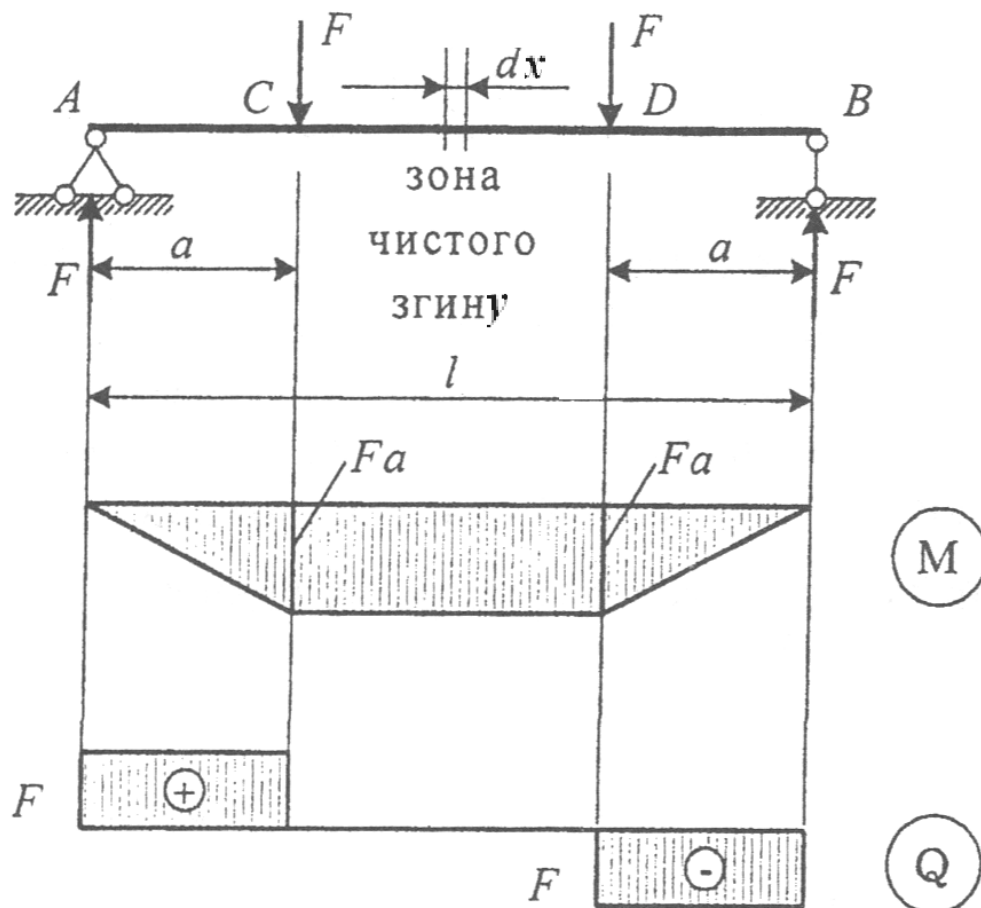


Рисунок 5.8

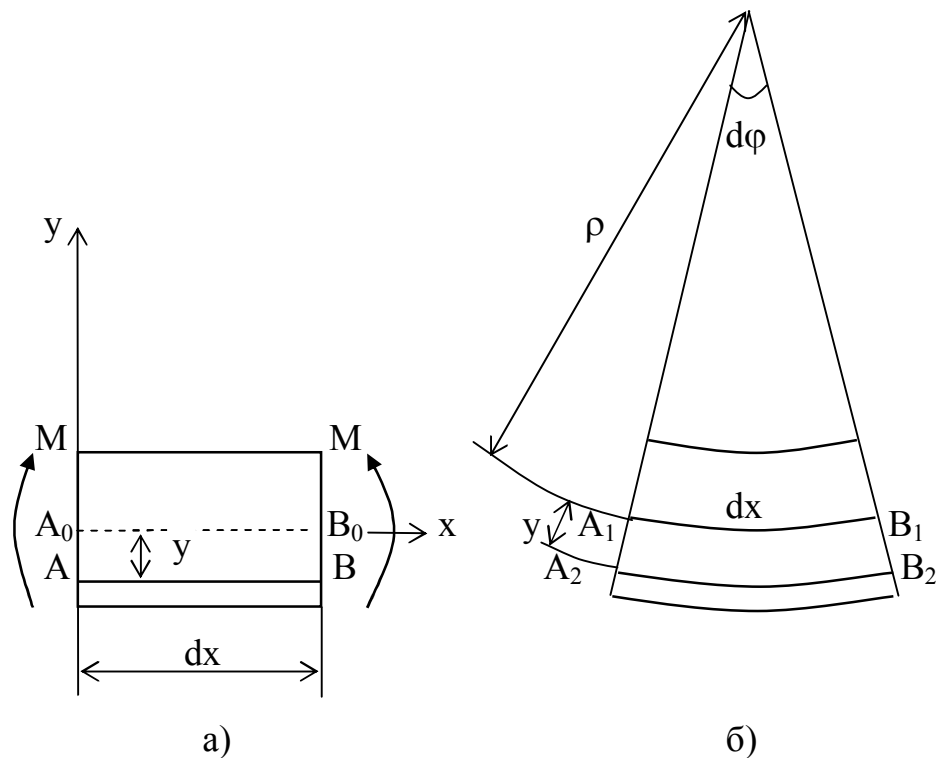


Рисунок 5.9

Прямолінійний відрізок нейтрального шару A_0B_0 перетворюється в дугу A_1B_1 з радіусом ρ , при цьому він не змінить своєї довжини. Волокно AB , що перебуває на відстані y від нейтрального шару перейде в дугу A_2B_2 радіуса $\rho + y$, до того ж воно змінить свою довжину. Відносне подовження цього волокна буде

$$\varepsilon = \frac{A_2B_2 - AB}{AB}.$$

З урахуванням того, що

$$\begin{aligned} A_2B_2 &= (\rho + y)d\varphi; \\ AB &= A_0B_0 = dx = \rho d\varphi, \end{aligned}$$

і скоротивши на $d\varphi$, одержуємо вираз для знаходження відносної деформації волокна на відстані y від нейтрального шару:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}.$$

Тепер розглянемо, у якому напруженому стані знаходиться досліджуване волокно AB . У поперечних перерізах немає дотичних напружень, оскільки у разі чистого згину відсутня поперечна сила. З

урахуванням парності дотичних напружень їх немає й у перерізах, паралельних до осі балки. Нормальні напруження в перерізах, рівнобіжних осі балки, так само дорівнюють нулю, оскільки, відповідно до гіпотези плоских перерізів, лінійні деформації у перпендикулярному до осі напрямку відсутні. Отже, волокно АВ перебуває в лінійному напруженому стані (розтяг-стиск). У цьому разі напруження та відносні деформації пов'язані між собою за законом Гука (3.9): $\sigma = \varepsilon E$. Унаслідок цього, замінивши в цьому співвідношенні відносну деформацію, відповідно до отриманої залежності, маємо:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (5.7)$$

Підставляючи отриману залежність (5.7) у друге рівняння співвідношення (5.1) і з огляду на те, що модуль пружності й кривина нейтральної осі постійні в розглянутому перерізі та їх можна винести за знак інтеграла, одержуємо:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M.$$

Оскільки відповідно до виразу (4.9) інтеграл $\int_A y^2 dA$ становить момент інерції перерізу щодо нейтральної осі (осі z) попереднє співвідношення можна подати у вигляді:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (5.8)$$

Отриманий вираз пов'язує між собою кривину осі балки та згинальний момент, що діє в перерізі. Аналізуючи (5.8), можна зробити висновок, якщо балка виготовлена з однорідного матеріалу й має постійний поперечний переріз, що при чистому згині вісь її викривляється по дузі кола. При цьому кривина та згинальний момент прямо пропорційні, а величина EI_z називається жорсткістю при згині.

Підставимо (5.8) в (5.7) і одержимо:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}. \quad (5.9)$$

Ця формула дає змогу знаходити нормальні напруження у разі чистого згину в будь-якій точці перерізу. У разі прямого згину, коли деформування

відбувається у площині головних центральних осей, індекс z в осьовому моменті інерції перерізу часто опускають.

Отримане співвідношення між нормальними напруженнями та згинальними моментами дає змогу зробити висновок, що яку б форму й розміри не мав поперечний переріз, напруження в точках, що перебувають на нейтральній осі ($y = 0$), дорівнюють нулю. Величина нормального напруження лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної осі. При цьому напруження не змінюються по ширині перерізу. Отже, максимальна і мінімальна величина нормальних напружень для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, буде збігатися з точністю до знака.

У розрахунках на міцність мають значення найбільші за абсолютною величиною значення напружень, які виникають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I},$$

де y_{\max} – відстань від нейтральної осі до найбільш віддалених точок перерізу.

З урахуванням (2.8), одержуємо умову міцності для чистого згину:

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ – допустимі напруження;

W_z – осьовий момент опору у разі згині щодо головної центральної осі – нейтральної осі у разі згині, яке визначається відносно головних центральних осей і дорівнює відношенню осьового моменту інерції до відстані від цієї осі до максимально віддаленої від точки перерізу:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

У разі прямого згину індекс z в моменті опору перерізу часто опускають.

З урахуванням цього умову міцності для балки при згині можна записати у вигляді

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (5.10)$$

де M_{\max} – максимальний згинальний момент, що виникає в балці під дією зовнішніх навантажень.

Усі формули для визначення відносних деформацій і нормальних напружень, наведені вище (5.7) - (5.10) отримані для чистого прямого згину балок. Практика показує, що для поперечного згину балок, коли в перерізі, крім згинального моменту, діє ще й поперечна сила, можна користатися формулами, отриманими для чистого згину. При цьому погрішність виявляється неістотною. Крім того, напруження, що обумовлені наявністю поперечної сили, можна досліджувати окремо.

У разі поперечного згину, крім нормальних напружень у поперечних перерізах балки виникають також і дотичні напруження. Якщо поперечний згин є *прямим*, то згинальний момент діє в площині, що збігається з однією з головних площин балки. Поперечна сила при цьому зазвичай рівнобіжна площині дії згинаючого моменту, і проходить через центр ваги цього перерізу.

Поперечна сила пов'язана з дотичними напруженнями, що виникають у цьому перерізі, і визначається за допомогою співвідношення (1.4). У цьому разі, дотичні напруження в поперечному перерізі балки при прямому згині (якщо вважати, що всі зовнішні навантаження паралельні до осі y) мають один напрямок з поперечною силою та їх прийнято позначати без індексу, що позначає напрямок. Передбачається, що дотичні напруження по всій ширині перерізу в горизонтальному напрямку, рівнобіжному осі z , однакові, а їхня величина змінюється тільки за висотою перерізу та дорівнює, згідно з формулою Журавського:

$$\tau = \frac{QS^*}{Ib}, \quad (5.11)$$

де Q – поперечна сила, що виникає в розглянутому поперечному перерізі балки;

S^* – статичний момент щодо нейтральної осі частини перерізу, розташованого вище або нижче лінії, що проходить через точку, у якій визначаються дотичні напруження;

I – момент інерції всього поперечного перерізу щодо нейтральної осі;

b – ширина поперечного перерізу на тому рівні, де визначаються напруження.

Приведена формула Журавського (5.11) отримана у припущенні, що переріз становить собою вузький прямокутник (при $\frac{h}{b} > 2$, де h – висота прямокутника, а b – його ширина), однак, як свідчить практика, її можна використовувати для будь-яких перерізів, крім тих місць у перерізі, де є вузькі прямокутники, розташовані перпендикулярно до напрямку дії

поперечної сили. Знак дотичних напружень у перерізі збігається зі знаком поперечної сили.

Максимальні дотичні напруження відповідно до співвідношення (5.11) будуть у точках, розташованих на нейтральній осі балки. Це твердження справедливе для всіх поперечних перерізів, крім тих, у яких у районі нейтральної осі спостерігається різке збільшення ширини. Отже вираз для максимальних дотичних напружень має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max}.$$

З урахуванням (2.9) одержуємо умову міцності для прямого поперечного згину балок по дотичних напруженнях для балки, в якій виникає поперечна сила Q :

$$\frac{Q_{\max}}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max} \leq [\tau], \quad (5.12)$$

де $[\tau]$ – допустимі дотичні напруження;

Q_{\max} – максимальне значення поперечної сили, що діє в поперечних перерізах балки.

Формули (5.11) і (5.12) для визначення дотичних напружень і підбору перерізу отримані для прямого поперечного згину балок.

У точках поперечного перерізу балки, найбільш віддалених від нейтральної осі, дотичні напруження дорівнюють нулю. У цих точках відповідно нормальні напруження досягають максимального значення (5.9). А в точках, де нормальні напруження дорівнюють нулю, відповідно дотичні напруження досягають максимальної величини (5.11). Отже, перевірка на міцність по нормальних і дотичних напруженнях при згині балок варто проводити окремо. При цьому в переважній більшості задач нормальні напруження істотно вище дотичних, тому головною формулою для розрахунків балок на міцність буде співвідношення (5.10).

Розподіл напружень, виникаючих у перерізах балки розглянемо на прикладах.

Прямокутний переріз. У перерізі діють згинальний момент M і поперечна сила Q , спрямовані, як зображено на рисунку 5.10. Поперечна сила Q , ширина перерізу $b = b_y$ та осьовий момент інерції $I = \frac{bh^3}{12}$ – конкретні постійні величини (рис. 5.10).

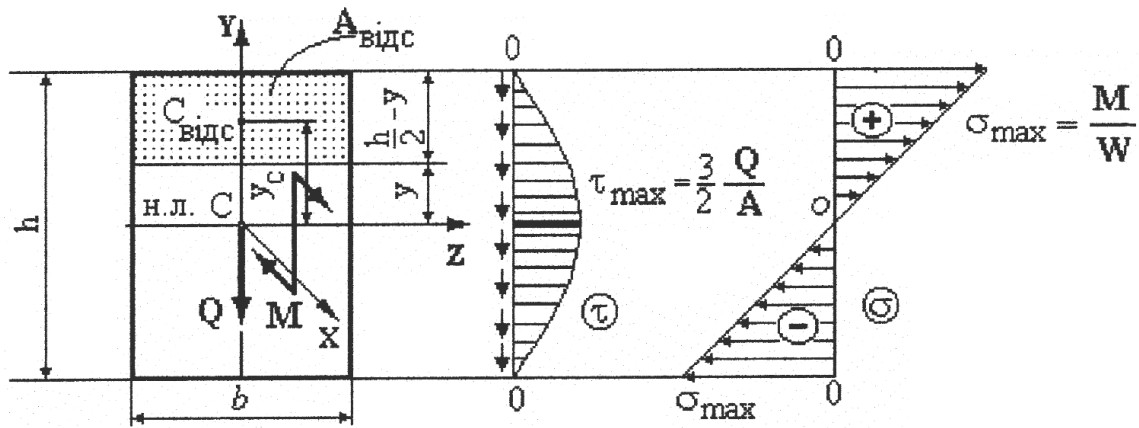


Рисунок 5.10

Нормальні напруження згідно з (5.9) змінюються за лінійним законом, їхні максимальні значення будуть у точках перерізу, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M}{W}.$$

Дотичні напруження змінюються за таким самим законом, що й статичний момент відсіченої частини площі.

Визначаємо дотичні напруження на рівні y . Площа відсіченої частини перерізу: $A^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{bh}{2} \left(1 - \frac{2y}{h} \right)$, положення її центра ваги $y_c = \frac{h}{2} - \frac{h/2 - y}{2} = \frac{h}{4} \left(1 + \frac{2y}{h} \right)$. Статичний момент відсіченої частини площі відносно осі z :

$$S^* = A^* \cdot y_c = \frac{bh}{2} \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \cdot \frac{h}{4} \left(1 + \frac{2y}{h} \right) = \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right].$$

Отже, дотичні напруження змінюються за законом квадратної параболи. Максимальні дотичні напруження виникають на нейтральній лінії, де нормальні напруження дорівнюють нулю. Для визначення τ_{\max} необхідно обчислити статичний момент половини площі перерізу, тоді:

$$\tau_{\max} \frac{QS_{\max}^*}{bI} = \frac{Qbh^2/8}{b \cdot bh^2/12} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}.$$

Двотавровий переріз. У перерізі діють згинальний момент M і поперечна сила Q , спрямовані, як зображено на рисунку 5.11.

Нормальні напруження згідно з (5.9) змінюються за лінійним законом, максимальні значення їх будуть у точках перерізу, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M}{W}.$$

Дотичні напруження, використовуючи формулу Журавського, визначимо в характерних точках.

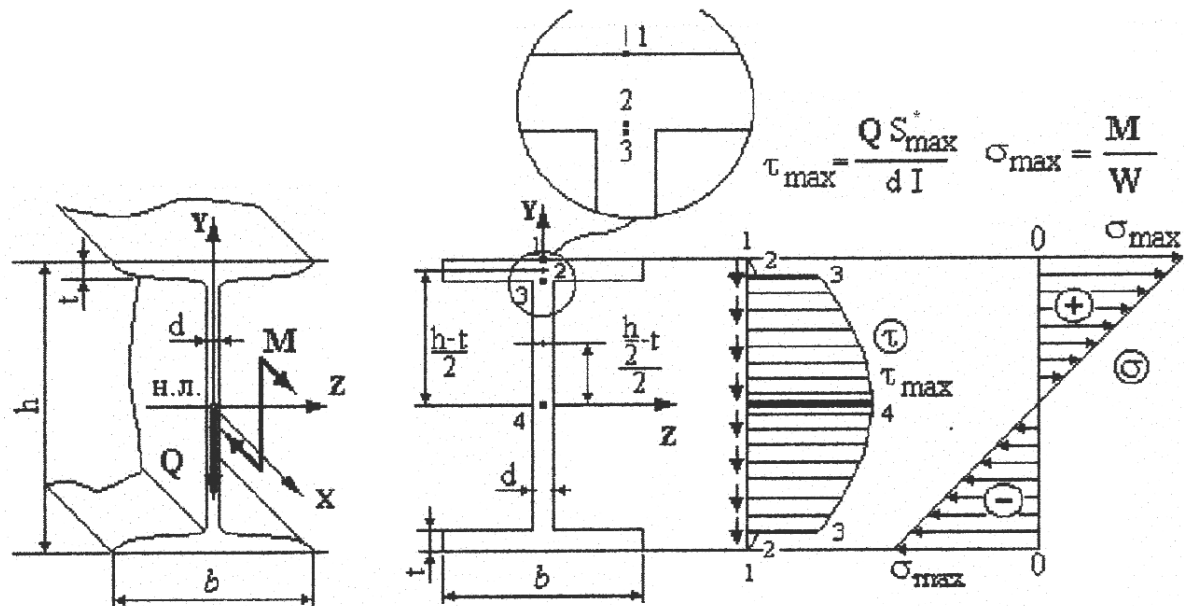


Рисунок 5.11

Точка 1. $\tau_1 = 0$, так як $S^* = 0$ (вище рівня 1 відсічена площа відсутня).

Точки 2 і 3. Ці точки мають однакову координату y , але належать полці й стінці одночасно, тобто різній ширині $b_2 = b$, $b_3 = d$. Тому в місці переходу полки в стінку виникає стрибок дотичних напружень.

$$\tau_2 = \frac{Q}{bI} bt \left(\frac{h-t}{2} \right) = \frac{Qt}{I} \left(\frac{h-t}{2} \right);$$

$$\tau_3 = \frac{Q}{dI} bt \left(\frac{h-t}{2} \right).$$

Точка 4:

$$\tau_4 = \tau_{\max} = \frac{Q}{dI} \left[bt \left(\frac{h-t}{2} \right) + d \left(\frac{h}{2} - t \right) \cdot \left(\frac{h/2 - t}{2} \right) \right] = \frac{QS_{\max}^*}{dI},$$

де S_{\max}^* – статичний момент відносно нейтральної осі половини площі перерізу, він зазвичай для стандартних профілів наведений у таблицях сортаменту (див. додаток). Зразковий графік розподілу дотичних напружень приведений на рисунку 5.11. Дійсний розподіл дотичних напружень трохи відрізняється від отриманого, оскільки полиці мають ухили, а перехід від полиці до стінки здійснюється по радіусу кривини.

5.3 Балки, завантажені нерівномірно розподіленим навантаженням

У всіх балках, які були розглянуті, якщо було розподілене навантаження, воно не змінювалось продовж осі балці.

Розглянемо приклад побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів для балки, завантаженої нерівномірно розподіленим навантаженням (рис. 5.12).

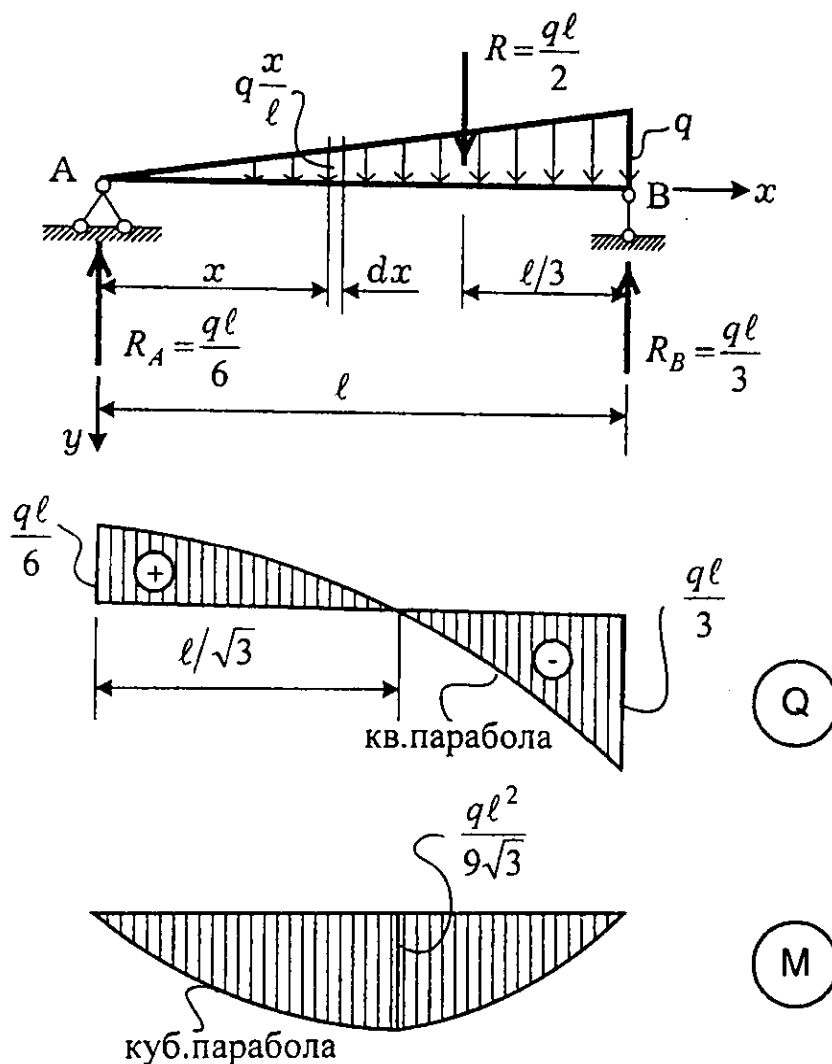


Рисунок 5.12

Визначимо опорні реакції з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_A = R_B \cdot \ell - \frac{q\ell}{2} \frac{2\ell}{3} = 0;$$

$$R_B = \frac{q\ell}{3};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot \ell + \frac{q\ell}{2} \frac{\ell}{3} = 0;$$

$$R_A = \frac{q\ell}{6}.$$

Для визначення опорних реакцій розподілене навантаження було замінено рівнодіючою R , що дорівнює площі цього навантаження (площі трикутника) і прикладена в її центрі ваги.

Перевіримо правильність визначення реакцій:

$$\sum F_y = -\frac{q\ell}{6} - \frac{q\ell}{3} + \frac{q\ell}{2} = 0.$$

Отже, опорні реакції знайдені правильно. Балка, яка розглядається, має одну ділянку. Складемо вирази Q і M , використовуючи метод перерізів. Для довільного перерізу x запишімо вирази Q і M , розглядаючи рівновагу лівої відсіченої частини балки:

$$Q = \frac{q\ell}{6} - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{\ell} = \frac{q}{6} \left(\ell - \frac{3x^2}{\ell} \right);$$

$$M = \frac{q\ell}{6} x - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{\ell} \frac{x}{3} = \frac{q \cdot x}{6} \left(\ell - \frac{x^2}{\ell} \right).$$

Отже, поперечна сила змінюється за квадратичною залежністю, а згинальний момент за кубічною.

Побудуємо епюру Q , для цього обчислимо значення:

$$\text{при } x = 0 \quad Q = \frac{q\ell}{6};$$

$$\text{при } x = l \quad Q = -\frac{q\ell}{3}.$$

Через них проведемо квадратну параболу, звернену опуклістю нагору, тому що в перерізі A ($x = 0$) знаходиться її вершина.

Побудуємо епюру M , для цього обчислимо значення згинального моменту на початку та кінці ділянки:

$$\text{при } x = 0 \quad M = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad M = 0.$$

На цій ділянці є характерний переріз, де $Q = 0$, а згинальний момент має екстремальне значення (5.5) $M = M_{\text{екстр}}$. Знайдемо його:

$$Q = \frac{q}{6} \left(\ell - \frac{3x^2}{\ell} \right) = 0. \text{ Звідси, розв'язуючи квадратне рівняння знайдемо } x = \frac{\ell}{\sqrt{3}}.$$

Визначаємо момент у цьому перерізі:

$$M = M_{\text{екстр}} = \frac{q \cdot \ell^2}{9\sqrt{3}}.$$

За обчисленими значеннями згинальних моментів будуємо кубічну параболу з вершиною при $x = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ (дотична до епюри згинальних моментів в цьому перерізі паралельна осі балці).

5.4 Внутрішні зусилля в рамах

Стержнева система, елементи якої (стійки – вертикальні й ригелі – горизонтальні) у всіх або деяких вузлах жорстко сполучені між собою, *називаються рамою*. Вісь таких систем становить ламану лінію. Якщо ламана лінія рами лежить в одній площині, то її називають плоскою. Будемо розглядати плоскі рами, навантажені в її площині. Тоді внутрішні зусилля, які виникають у якому-небудь перерізі, можна звести до трьох величин: згинального моменту M , поперечної сили Q і подовжніх зусиль N .

Визначення поперечної сили в цьому разі розширюється, оскільки у ламаного бруса сили не завжди перпендикулярні до осі. Отже поперечною силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на нормаль до осі бруса в тому перерізі, для якого визначається поперечна сила.

Поздовжньою силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на дотичну до його осі.

Поняття «зліва», «справа», «донизу» й «вверх» під час розгляду вертикальних елементів системи залежить від спостерігача. В опорі матеріалів прийнято спостерігати з середини контуру, який утворює рама. Тоді правило знаків для згинальних моментів і поперечних сил залишається таким же самим і для згину балок (рис. 5.2).

Поздовжня сила, як і під час розтягу-стиску стержнів, вважається додатною, якщо вона викликає розтяг стержня у перерізі, що розглядається, і від'ємною, якщо вона викликає стиск. Крім перевірок з

використанням диференціальних залежностей, під час згині рам необхідно ще перевірити рівновагу вузлів рами, тобто частин рами, отриманих шляхом проведення перерізів, розташованих на нескінченно малих відстанях від точки з'єднання стержнів і окремих її частин.

5.5 Приклади розрахунків

Приклад 1.

Побудувати епюру внутрішніх зусиль для балки, приведеної на рисунку 5.13, а і визначити максимальні значення внутрішніх зусиль, що діють у балці, якщо $F = 40$ кН.

Розв'язання.

Розрахунок починаємо з визначення опорних реакцій R_A і R_B балки, яка є однопрогінною балкою. У цьому разі використаємо рівняння моментів сил відносно точок А і В балки:

$$\sum M_A = R_B \cdot 6.4 - F \cdot 2.4 = 0; \quad R_B = \frac{F \cdot 2.4}{6.4} = \frac{40 \cdot 2.4}{6.4} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 6.4 + F \cdot 4 = 0; \quad R_A = \frac{F \cdot 4}{6.4} = \frac{40 \cdot 4}{6.4} = 25 \text{ кН}.$$

Для перевірки візьмемо суму проекцій сил на вісь y :

$$\begin{aligned} \sum F_y &= R_A - F + R_B = 0; \\ 25 - 40 + 15 &= 0; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Реакції R_A і R_B визначено правильно. Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль балку розіб'ємо на ділянки.

Межами ділянок повинні бути: точки прикладання зосереджених сил і моментів, а також початок і кінець розподілених навантажень. У нашому прикладі на балці таких ділянок – дві.

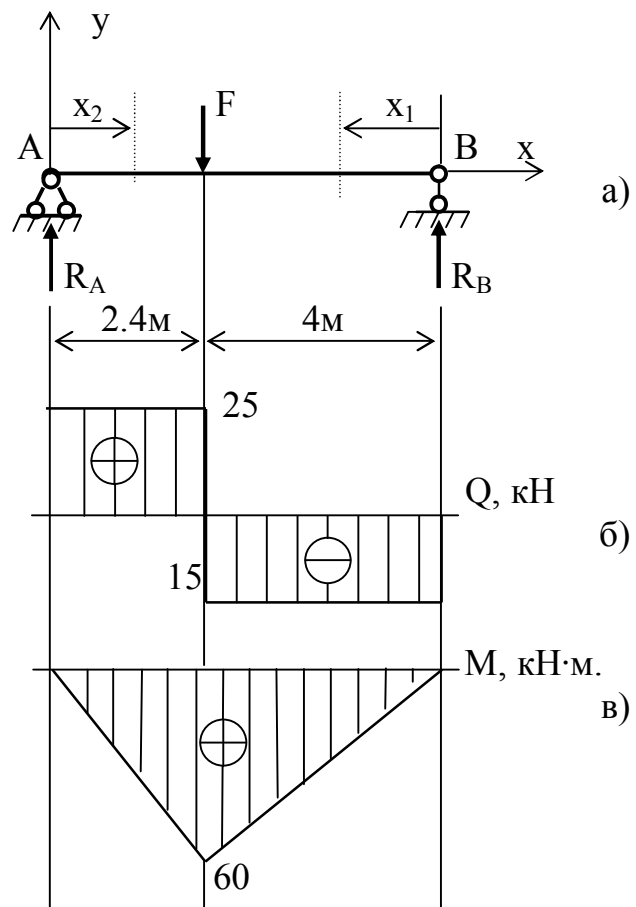


Рисунок 5.13

Правила знаків для визначення внутрішніх зусиль наведено на рисунку 5.4.

Спочатку побудуємо епюру поперечних сил, які дорівнюють алгебраїчній сумі проекцій лівих (правих) сил на нормаль до осі балки. Для цієї балки потрібно перерізи проводити двічі, на кожній ділянці окремо. Потім розглядати ту частину умовно розрізаної балки, на котрій діє менше зовнішніх сил.

Для перерізів із координатами x_1 і x_2 отримаємо:

$$\text{при } 0 \leq x_1 \leq 4 \text{ м} \quad Q(x_1) = -R_B = -15 \text{ кН};$$

$$\text{при } 0 \leq x_2 \leq 2.4 \text{ м} \quad Q(x_2) = R_A = 25 \text{ кН}.$$

За одержаними значеннями на рисунку 5.13, б побудовано епюру поперечної сили Q .

Побудуємо далі епюру згинальних моментів. Для побудови епюри врахуємо що на кожній ділянці згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів лівих (правих) сил відносно центру ваги перерізу.

Для прийнятих перерізів балки буде:

$$\text{при } 0 \leq x_1 \leq 4 \text{ м} \quad M(x_1) = R_B \cdot x_1 = 15x_1;$$

$$M(x_1 = 0) = 0; \quad M(x_1 = 4) = 15 \cdot 4 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } 0 \leq x_2 \leq 2.4 \text{ м} \quad M(x_2) = R_A \cdot x_2 = 25x_2;$$

$$M(x_2 = 0) = 0; \quad M(x_2 = 2.4) = 25 \cdot 2.4 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На кожний з ділянок залежності $M(x_1)$ і $M(x_2)$ є лінійними. Тому необхідно з'єднати отримані точки прямими та побудувати епюру. Її наведено на рисунку 5.13, в.

Відповідь: максимальні значення поперечної сили та згинального моменту: $Q_{\max} = 25 \text{ кН}$, $M_{\max} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Приклад 2.

Підібрати двотавровий переріз сталеві балки, приведеної на рисунку 5.14, а з умови міцності. Допустимі напруження вважати рівними $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$, зовнішні сили $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 25 \text{ кН}$, а інтенсивність розподіленого навантаження $q = 20 \text{ кН/м}$.

Розв'язання.

Для побудови епюр поперечної сили Q і згинального моменту M визначимо реакції опор в точках В і С балки, яка є однопрогінною з двома консолями.

Для визначення опорних реакцій використовуємо рівняння моментів сил відносно точок В і С:

$$\sum M_B = F_1 \cdot 0.8 - q \cdot 4.6 \cdot 5.3 + R_C \cdot 6 - F_2 \cdot 7.6 = 0;$$

$$R_C = \frac{-F_1 \cdot 0.8 + q \cdot 24.38 + F_2 \cdot 7.6}{6} = \frac{-15 \cdot 0.8 + 20 \cdot 24.38 + 25 \cdot 7.6}{6} = 110.93 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = F_1 \cdot 6.8 - R_B \cdot 6 + q \cdot 4.6 \cdot 0.7 - F_2 \cdot 1.6 = 0;$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot 6.8 + q \cdot 3.22 - F_2 \cdot 1.6}{6} = \frac{15 \cdot 6.8 + 20 \cdot 3.22 - 25 \cdot 1.6}{6} = 21.07 \text{ кН}.$$

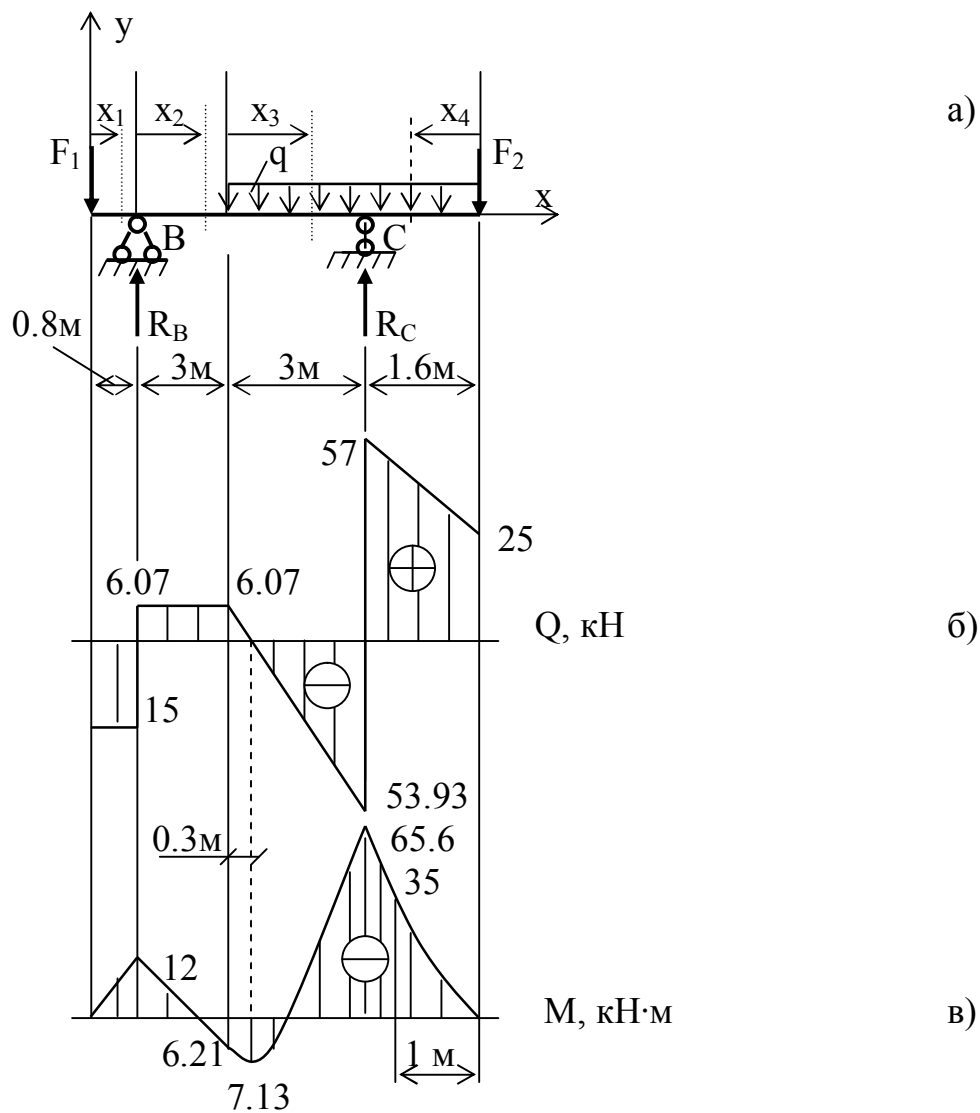


Рисунок 5.14

Для перевірки складемо рівняння рівноваги сил в напрямку осі у:

$$\sum F_y = -F_2 + R_B - q \cdot 4.6 + R_C - F_1 = 0,$$

$$-15 + 21.07 - 20 \cdot 4.6 + 110.93 - 25 = 0,$$

$$0 = 0.$$

З останньої тотожності випливає, що опорні реакції визначено правильно. Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль балку поділяємо на ділянки. У нашому прикладі на балці таких ділянок чотири. Спочатку побудуємо епюру поперечних сил. Для побудови епюри виконаємо чотири перерізи балки з координатами x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\text{для } 0 \leq x_1 \leq 0.8 \text{ м} \quad Q(x_1) = -F_1 = -15 \text{ кН};$$

$$\text{для } 0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м} \quad Q(x_2) = -F_1 + R_B = -15 + 21.07 = 6.07 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \text{для } 0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м} \quad Q(x_3) &= -F_1 + R_B - qx_3 = -15 + 21.07 - 20x_3 = 6.07 - 20x_3, \\ Q(x_3 = 0) &= 6.07 \text{ кН}, \quad Q(x_3 = 3) = 6.07 - 20 \cdot 3 = 53.93 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{для } 0 \leq x_4 \leq 1.6 \text{ м} \quad Q(x_4) &= F_2 + qx_4 = 25 + 20x_4 = 25 + 20x_4, \\ Q(x_4 = 0) &= 25 \text{ кН}, \quad Q(x_4 = 1.6) = 25 + 20 \cdot 1.6 = 57 \text{ кН}. \end{aligned}$$

За одержаними даними будуємо епюру Q (рис. 5.14, б).

Далі будуємо епюру згинальних моментів.

Для наведених перерізів буде:

$$\begin{aligned} \text{для } 0 \leq x_1 \leq 0.8 \text{ м} \quad M(x_1) &= -F_1 \cdot x_1 = -15x_1 \text{ (залежність лінійна)}, \\ M(x_1 = 0) &= 0, \quad M(x_1 = 0.8) = -15 \cdot 0.8 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{для } 0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м} \quad M(x_2) &= -F_1(x_2 + 0.8) + R_B x_2 = -15(x_2 + 0.8) + 21.07x_2 = \\ &= 6.07x_2 - 12 \text{ (залежність лінійна)}, \\ M(x_2 = 0) &= -12 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M(x_2 = 3) = 6.07 \cdot 3 - 12 = 6.21 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{для } 0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м} \quad M(x_3) &= -F_1(x_3 + 3.8) + R_B(3 + x_3) - q \frac{x_3^2}{2} = \\ &= -15(x_3 + 3.8) + 21.07(3 + x_3) - 20 \frac{x_3^2}{2} = \\ &= 6.21 + 6.07x_3 - 10x_3^2 \text{ (залежність квадратна)}, \\ M(x_3 = 0) &= 6.21 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M(x_3 = 3) &= 6.21 + 6.07 \cdot 3 - 10 \cdot 9 = -65.58 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{для } 0 \leq x_4 \leq 1.6 \text{ м} \quad M(x_4) &= -F_2 \cdot x_4 - q \frac{x_4^2}{2} = -25x_4 - 20 \frac{x_4^2}{2} = \\ &= -25x_4 - 10x_4^2 \text{ (залежність квадратна)}, \\ M(x_4 = 0) &= 0, \quad M(x_4 = 1.6) = -25 \cdot 1.6 - 10 \cdot 1.6^2 = \\ &= -65.6 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Щоб побудувати епюру $M(x_3)$ на ділянці з розподіленням навантаження, потрібно побудувати криву – другого порядку параболу. Для цього необхідно не менше трьох точок для $M(x_3)$. Дві з їх вже визначено: $M(x_3 = 0) = 6.21 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і $M(x_3 = 3) = -65.58 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Третє значення

М визначимо для перерізу з координатою x_3^* , є якому поперечна сила дорівнює нулю:

$$Q(x_3^*) = 6.07 - 20x_3^* = 0.$$

Звідси: $x_3^* = 6.07/20 = 0.3$ м.

Тоді:

$$M(x_3^* = 0.3) = 6.21 + 6.07 \cdot 0.3 - 10 \cdot 0.3^2 = 7.13 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці $0 \leq x_3 \leq 3$ м друга похідна $d^2M/dx_3^2 = -20$, тобто від'ємна, тому в перерізі x_3 маємо найменше значення згинального моменту на ділянці.

Для четвертої ділянки епюра $M(x_4)$ також криволінійна. Тому на цій ділянці знову визначимо значення моменту $M(x_4)$ у трьох точках. Поперечна сила на ділянці не має значення $Q = 0$, тому третю точку приймемо довільно, наприклад $x_4 = 1$:

$$M(x_4 = 1) = -25 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 = -35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Епюра M наведена на рисунку 5.14, в.

Підберемо тепер переріз балки. Найбільший згинальний момент (за модулем), що виникає в балці, дорівнює $M_{\max} = 65.6 \text{ кН} \cdot \text{м} = 6560 \text{ кН} \cdot \text{см}$. З умови міцності у разі згину (5.10):

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6560}{16} = 410 \text{ см}^3.$$

За сортаментом ДСТУ 8239-89 (див. додаток) приймаємо двотавр № 30, для якого момент опору згину $W = 472 \text{ см}^3$.

Відповідь: умові міцності відповідає сталева балка, що виготовлена з двотавра №30.

Приклад 3.

Схема навантаження та розміри балки наведено на рисунку 5.15, а. Необхідно підібрати поперечний переріз двотаврової сталевий балки при $[\sigma] = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, а також балки з деревини прямокутного та круглого перерізу

при $[\sigma] = 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

Розв'язання.

Визначимо опорні реакції балки в точках А і В:

$$\sum M_A = F \cdot 3.0 - q \cdot 5.0 \cdot 2.5 - M + R_B \cdot 5.0 = 0,$$

$$R_B = \frac{-20 \cdot 3.0 + 20 \cdot 5.0 \cdot 2.5 + 30}{5.0} = 44 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = F \cdot 8.0 - R_A \cdot 5.0 + q \cdot 5.0 \cdot 2.5 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 8.0 + 20 \cdot 5.0 \cdot 2.5 - 30}{5.0} = 76 \text{ кН.}$$

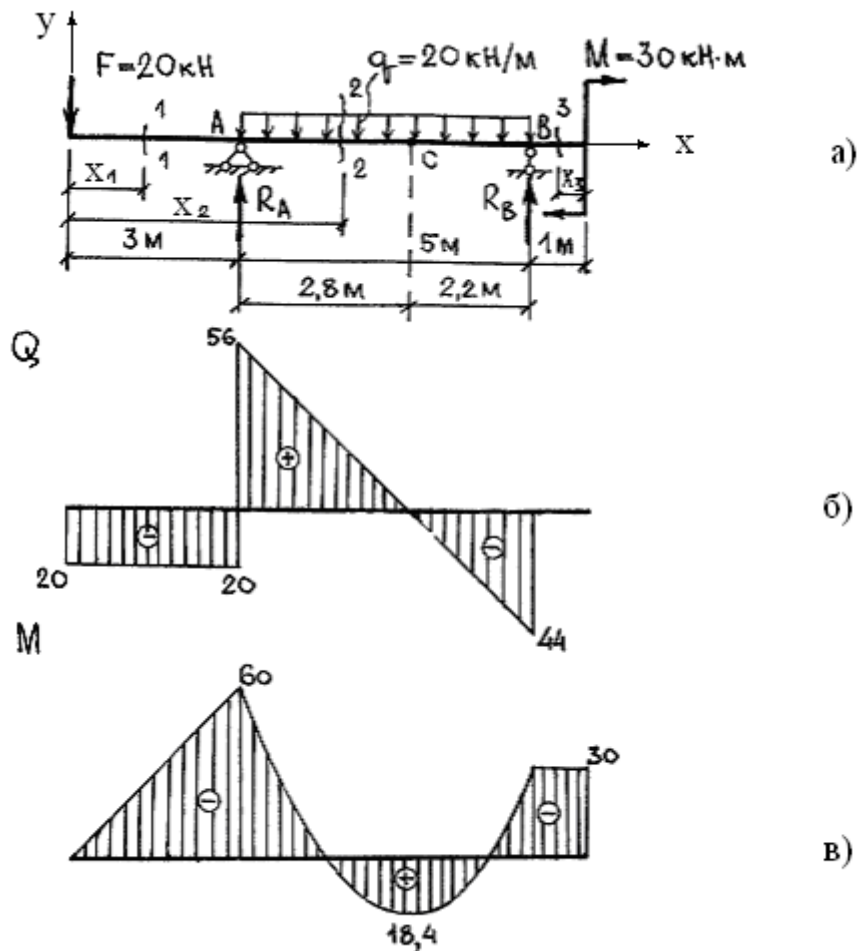


Рисунок 5.15

Для перевірки складемо рівняння $\sum F_y = 0$,

$$-F + R_A - q \cdot 5.0 + R_B = -20 + 76 - 20 \cdot 5.0 + 44 = 0,$$

отже опорні реакції знайдені правильно.

Для визначення внутрішніх силових факторів Q і M розбиваємо балку на три ділянки з координатами x_1 , x_2 , x_3 і розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3 на них. Відкидаємо праві частини балки для перерізів 1-1 і 2-2 (ліву - для перерізу 3-3) і розглядаємо рівновагу лівої (правої) частини цих балок.

Переріз 1-1, $0 \leq x_1 \leq 3.0$ м.

Розглядаючи рівновагу лівої частини балки одержимо:

$$Q(x_1) = -F = -20 \text{ кН.}$$

Із одержаного розв'язку можна зробити висновок, що поперечна сила на цій ділянці є постійною, тому її графічне зображення буде прямою лінією, паралельною до осі x . Будуємо епюру $Q(x_1)$.

Згинальні моменти на ділянці одержимо, узявши суму моментів лівих сил відносно перерізу 1-1:

$$M(x_1) = -F \cdot x_1 \text{ (залежність лінійна).}$$

Відповідну епюру одержимо за значеннями моментів у двох точках:

при $x_1 = 0$ $M(x_1 = 0) = 0$;

при $x_1 = 3.0$ м $M(x_1 = 3.0) = -20 \cdot 3.0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Будуємо епюру $M(x_1)$.

Переріз 2-2, $3.0 \text{ м} \leq x_2 \leq 8.0$ м.

Поперечна сила на цій ділянці описується рівнянням

$$Q(x_2) = -F + R_A - q(x_2 - 3.0)$$

і змінюється за лінійним законом:

при $x_2 = 3.0$ м $Q(x_2) = -F + R_A = -20 + 76 = 56 \text{ кН}$;

при $x_2 = 8.0$ м $Q(x_2) = -F + R_A - q \cdot 5.0 = -20 + 76 - 20 \cdot 5.0 = -44 \text{ кН}$.

Будуємо епюру $Q(x_2)$.

Згинальний момент на ділянці визначається за допомогою виразу:

$$M(x_2) = -F \cdot x_2 + R_A(x_2 - 3.0) - q \frac{(x_2 - 3.0)^2}{2} \text{ (квадратна парабола)}$$

при $x_2 = 3.0$ м $M(x_2) = -F \cdot 3.0 = -20 \cdot 3.0 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

при $x_2 = 8.0$ м $M(x_2) = -F \cdot x_2 + R_A 5.0 - q \frac{5.0^2}{2} =$
 $= -20 \cdot 8.0 + 76 \cdot 5.0 - \frac{5.0^2}{2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Максимальний згинаючий момент знаходиться в перерізі, де поперечна сила $Q(x_2) = 0$. Відповідно до цього одержуємо

$$Q(x_2^*) = -F + R_A - q(x_2 - 3.0) = -20 + 76 - 20(x_2 - 3.0) = 0, \quad x_2 = 5.8 \text{ м.}$$

тому

$$M(x_2^* = 5.8) = -F \cdot x_2 + R_A(x_2 - 3.0) - q \frac{(x_2 - 3.0)^2}{2} =$$
$$-20 \cdot 5.8 + 76(5.8 - 3.0) - 20 \frac{(5.8 - 3.0)^2}{2} = 18.4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Будуємо епюру $M(x_2)$ по трьох точках.

Переріз 3-3, $0 \leq x_3 \leq 1.0$ м.

поперечна сила $Q(x_3) = 0$;

згинальний момент $M(x_3) = -M = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Будуємо епюри $Q(x_3)$ і $M(x_3)$.

Поперечні перерізи балки підбираємо за максимальним по модулю значенням згинального моменту, яке дорівнює 60 кН·м.

Для сталеної балки:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6000}{16} = 375 \text{ см}^3$$

За сортаментом ДСТУ 8239-89 (див. додаток) вибираємо двотавр № 27а, для якого $W = 407 \text{ см}^3$.

Для дерев'яної балки прямокутного профілю при $h = 2b$:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6000}{1} = 6 \cdot 10^3 \text{ см}^3.$$

Момент опору прямокутного перерізу при $b = h/2$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h/2 \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12}.$$

Отже одержимо

$$\frac{h^3}{12} \geq 6 \cdot 10^3, \quad h \geq \sqrt[3]{12 \cdot 6 \cdot 10^3} = 41.6 \text{ см}, \quad b = h/2 = 41.6/2 = 20.8 \text{ см}.$$

Для дерев'яної балки круглого перерізу:

$$W = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Отже

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq 6 \cdot 10^3, \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^3}{3.14}} = 39.4 \text{ см}.$$

Відповідь: умовам міцності відповідають для сталеної балки двотавр № 27а; для балки з деревини: прямокутний переріз з $h = 41,6$ см, $b = 20,8$ см; круглий переріз $d = 39,4$ см.

Приклад 4.

Для рами, зображеної на рисунку 5.16, визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних і поздовжніх сил і згинальних моментів.

Розв'язання.

Визначаємо опорні реакції, користуючись рівняннями статичної рівноваги:

$$\sum F_z; q \cdot 2.0 - 10 - H_B = 0 \Rightarrow$$

$$H_B = 30 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \sum M_A; -q \cdot 2.0 \cdot 1.0 - M + R_B \cdot 3.0 - H_B \cdot 2.0 = \\ = -20 \cdot 2.0 \cdot 1.0 - 50 + R_B \cdot 3.0 - 30 \cdot 2.0 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_B = \frac{20 \cdot 2.0 \cdot 1.0 + 50 + 30 \cdot 2.0}{3.0} = 50 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \sum M_B; -q \cdot 2.0 \cdot 3.0 - M + F \cdot 2.0 + R_A \cdot 3.0 = \\ = -20 \cdot 2.0 \cdot 3.0 - 50 + 10 \cdot 2.0 + R_A \cdot 3.0 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 2.0 \cdot 3.0 + 50 - 10 \cdot 2.0}{3.0} = 50 \text{ кН}.$$

Одержані величини опорних реакцій мають додатні значення, тобто їхні напрями співпадають з прийнятими.

Перевірка:

$$\sum F_y; -R_A + R_B = -50 + 50; 0 = 0.$$

Опорні реакції знайдені правильно.

Для визначення Q , N і M користуємось методом перерізів. Розбиваємо раму на чотири ділянки й розглядаємо перерізи 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 на них. Якщо на кожній з ділянок відкинути одну з частин рами, то рівновага частини, що залишиться, буде забезпечуватися відповідними поперечними та поздовжніми силами, згинальними моментами.

Для усіх перерізів поперечну силу Q знаходимо з рівняння проєкцій сил на осі, перпендикулярні до відповідних стояків і ригелів, поздовжню силу N – із рівняння проєкцій сил на осі, паралельні відповідним стоякам і ригелям, а згинальний момент M – із рівняння суми моментів від усіх сил, що діють на залишену частину, відносно центра ваги відповідних перерізів.

Переріз 1-1 (ділянка I), $0 \leq z_I \leq 2.0$ м,

$$Q_I = -q \cdot z_I, \quad N = R_A, \quad M_I = -\frac{q \cdot z_I^2}{2}.$$

На цій ділянці поперечна сила змінюється за лінійним законом, поздовжня сила має постійне значення і розтягує стержень, а згинаючий момент змінюється за законом квадратної параболи.

$$\text{при } z_I = 0: \quad Q_I = 0 \quad N_I = R_A = 50 \text{ кН}; \quad M_I = 0.$$

$$\text{при } z_I = 2.0 \text{ м: } Q_I = -q \cdot 2.0 = -20 \cdot 2.0 = -40 \text{ кН}; \quad N_I = R_A = 50 \text{ кН};$$

$$M_I = -\frac{q \cdot 2.0^2}{2} = -\frac{20 \cdot 2.0^2}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

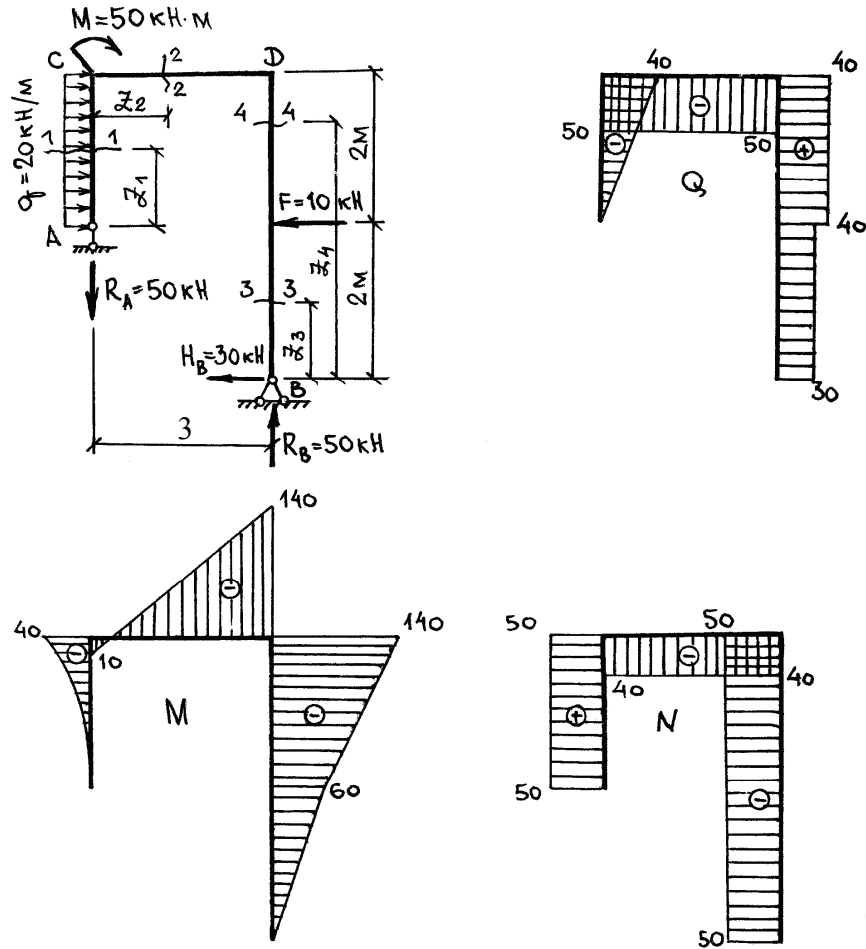


Рисунок 5.16

Переріз 2-2 (ділянки 2), $0 \leq z_2 \leq 3.0$ м,

$$Q_2 = -R_A, \quad N_2 = -q \cdot 2.0, \quad M_2 = -R_A \cdot z_2 - q \cdot 2.0 \cdot 1.0 + M.$$

На цій ділянці поперечна сила має постійне значення; поздовжня сила – також, а згинальний момент змінюється за лінійним законом.

при $z_2 = 0$: $Q_2 = -R_A = -50$ кН, $N_2 = -q \cdot 2.0 = -20 \cdot 2.0 = -40$ кН,

$$M_2 = -q \cdot 2.0 \cdot 1.0 + M = -20 \cdot 2.0 \cdot 1.0 + 50 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

при $z_2 = 3.0$ м: $Q_2 = -R_A = -50$ кН; $N_2 = -q \cdot 2.0 = -20 \cdot 2.0 = -40$ кН;

$$M_2 = -R_A \cdot 3.0 - q \cdot 2.0 \cdot 1.0 + M = -50 \cdot 3.0 - 20 \cdot 2.0 \cdot 1.0 + 50 = -140 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Переріз 3-3, (ділянка 3) $0 \leq z_3 \leq 2.0$ м,

$$Q_3 = H_B, \quad N_3 = -R_B, \quad M_3 = -H_B \cdot z_3.$$

Поперечна та поздовжня сили на цій ділянці мають постійне значення; згинальний момент змінюється за лінійним законом.

при $z_3 = 0$ $Q_3 = H_B = 30$ кН, $N_3 = -R_B = -50$ кН, $M_3 = 0$;

при $z_3 = 2.0$ м $Q_3 = H_B = 30$ кН, $N_3 = -R_B = -50$ кН,

$$M_3 = -H_B \cdot 2.0 = -30 \cdot 2.0 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Переріз 4-4, (ділянка 4) $2.0 \text{ м} \leq z_4 \leq 4.0 \text{ м}$,

$$Q_4 = H_B + F, \quad N_4 = -R_B, \quad M_3 = -H_B \cdot z_4 - F \cdot (z_4 - 2).$$

На цій ділянці поперечна і поздовжня сили мають постійне значення; згинальний момент змінюється за лінійним законом:

при $z_4 = 2.0 \text{ м}$ $Q_3 = H_B + F = 30 + 10 = 40 \text{ кН}$, $N_3 = -R_B = -50 \text{ кН}$,

$$M_3 = -H_B \cdot 2.0 = -30 \cdot 2.0 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

при $z_4 = 4.0 \text{ м}$ $Q_3 = H_B + F = 30 + 10 = 40 \text{ кН}$, $N_3 = -R_B = -50 \text{ кН}$,

$$M_3 = -H_B \cdot 4.0 - F \cdot 2.0 = -30 \cdot 4.0 - 10 \cdot 2.0 = -140 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

За результатами обчислень будуюмо епюри Q , N і M . приймаючи до уваги знаки знайдених величин.

Для побудови епюр Q , N додатний напрям осі ординат обираємо вверху (тобто назовні контуру рами), для побудови епюри M – униз, бо ця епюра будується на розтягнутих волокнах.

Як видно з прикладу, розрахунок рами пов'язаний з великими обчисленнями, що може призвести до хибних результатів. Тому знайдені значення Q , N і M потрібно перевірити з використанням рівнянь, які не використовувались вище.

Перевірку правильності знайдених значень Q , N і M проводять за умови рівноваги всіх вузлів рами. Для цього треба вирізати вузли C і D , прикласти в перерізах вузлів зусилля Q , N і M з напрямками, що відповідають правилу знаків (рис. 5.4).

Вузол C . Відзнакою цього вузла є наявність у ньому зовнішнього моменту $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Прикладаємо його до вузла. Складаємо три умови рівноваги (рис. 5.17, а).

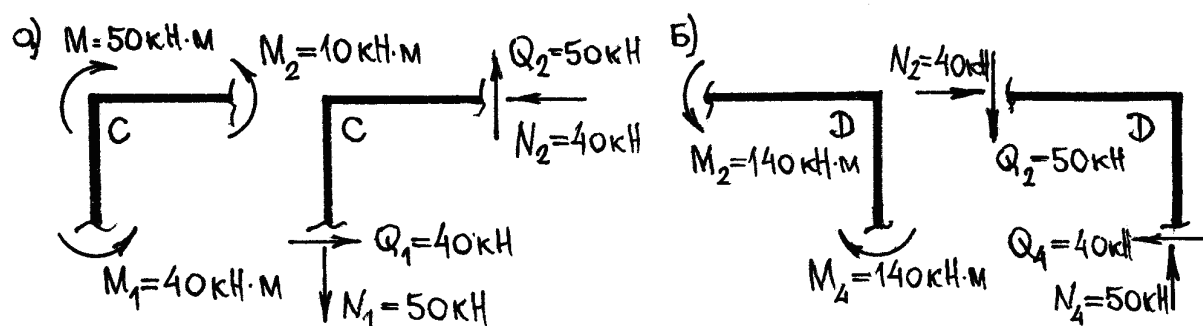


Рисунок 5.17

$$\sum M_C = M_1 + M_2 - M = 40 + 10 - 50 = 0;$$

$$\sum F_z = Q_1 - N_2 = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum F_y = -N_1 + Q_2 = -50 + 50 = 0.$$

Усі рівняння задовольняють вимогам рівноваги, тобто вузол С перебуває в рівновазі.

Вузол D. Рівняння рівноваги для цього вузла (рис. 5.17, б):

$$\sum M_D = M_2 - M_4 = 140 - 140 = 0;$$

$$\sum F_z = N_2 - Q_4 = 40 - 40 = 0;$$

$$\sum F_y = -Q_2 + N_4 = -50 + 50 = 0.$$

Вузол D також перебуває в рівновазі.

Можна зробити висновок, що зусилля Q , N і M визначені правильно.

6 ЗСУВ І КРУЧЕННЯ

6.1 Чистий зсув

У розрахунках деяких елементів конструкцій зустрічається вид навантаження, коли в перерізах діють тільки дотичні напруження. Такий напружений стан називається *чистим зсувом*. Він характеризується зміною спочатку прямих кутів – кутовою деформацією чи відносним зсувом.

Кутові деформації є наслідком дотичних напружень і пов'язані з ними функціональними залежностями. У границях пружності між відносним зсувом і дотичними напруженнями (рис. 6.1), що діють на гранях елемента, існує лінійна залежність. Ця залежність називається законом Гука для зсуву:

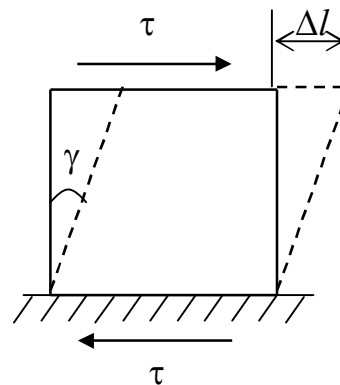


Рисунок 6.1

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (6.1)$$

де G – модуль пружності другого роду (модуль пружності для зсуву). Він визначається дослідним шляхом і є характеристикою матеріалу;

γ – кутова деформація.

Співвідношення (6.1) можна подати у вигляді

$$\tau = G\gamma. \quad (6.2)$$

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності у разі зсуву й модулем пружності у разі розтягу-стиску існує зв'язок виду:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

де E – модуль пружності для розтягу-стиску;

μ – коефіцієнт Пуассона.

6.2 Розрахунок на зріз

Деформації зсуву в тілах спостерігаються в тих випадках, коли з усіх внутрішніх силових факторів, що діють у перерізі, ненульовими є тільки поперечні сили. На практиці зсуву в чистому вигляді одержати важко, зазвичай, деформації зсуву супроводжуються іншими видами деформацій – стиском чи згином.

З достатнім ступенем наближення деформація зсуву практично може бути отримана у разі, коли на брус із протилежних боків на близькій відстані один від одного діють дві однакові сили, перпендикулярні до його осі та спрямовані в протилежні боки, як зображено на рисунку 6.2. Руйнування бруса при такому типі навантаження називається зрізом.

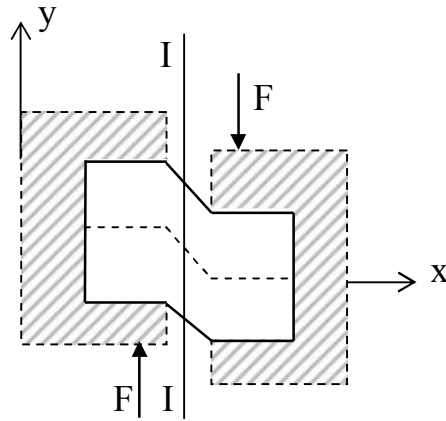


Рисунок 6.2

Розглянемо внутрішні силові фактори, напруження та деформації, що виникають у разі навантаження бруса в такий спосіб. У цьому разі з усіх внутрішніх факторів у розглянутому перерізі I-I ненульовим буде тільки поперечна сила Q_y , що відповідно до методу перерізів дорівнює всім силам у відкинутій частині. Надалі не будемо вказувати індекс при силі, що показує, у якому напрямку вона діє:

$$Q = F.$$

Припустимо, що величина дотичних напружень у поперечному перерізі не змінюється, тоді:

$$Q = \int_A \tau dA = \tau \int_A dA = \tau A, \quad (6.3)$$

звідси:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \quad (6.4)$$

На практиці припущенням про рівномірність розподілу дотичних напружень користуються для розрахунків на зріз болтів, заклепувальних з'єднань, шпонок й інших деталей.

6.3 Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом

Крученням називається такий вид деформування, при якому з усіх внутрішніх силових факторів ненульовим є тільки момент що крутить, $M_{кр}$. Кручення прямого бруса відбувається у разі навантаження його зовнішніми крутними моментами, площина дії яких перпендикулярна до подовжньої осі бруса. Бруси, що працюють на кручення, зазвичай називають валами, осями.

Розглянемо круглий брус АВ, жорстко закріплений у площини MN, до вільного кінця якого прикладена пара сил, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі бруса (рис. 6.3).

Ця пара сил створює момент $M_{кр} = Fa$, що скручує брус. Досвід показує, що у разі закручення на невеликий кут у границях пропорційності матеріалу діаметр бруса та його довжина не змінюються, вісь залишається прямою, а поперечний переріз плоским. Зміна форми відзначається твірними bc стержня, що із прямих ліній стають гвинтовими bc' (рис. 6.3). Тобто під час кручення відбувається зсув поперечних перерізів бруса, кожний поперечний переріз повертається навколо осі x як жорсткий тонкий диск.

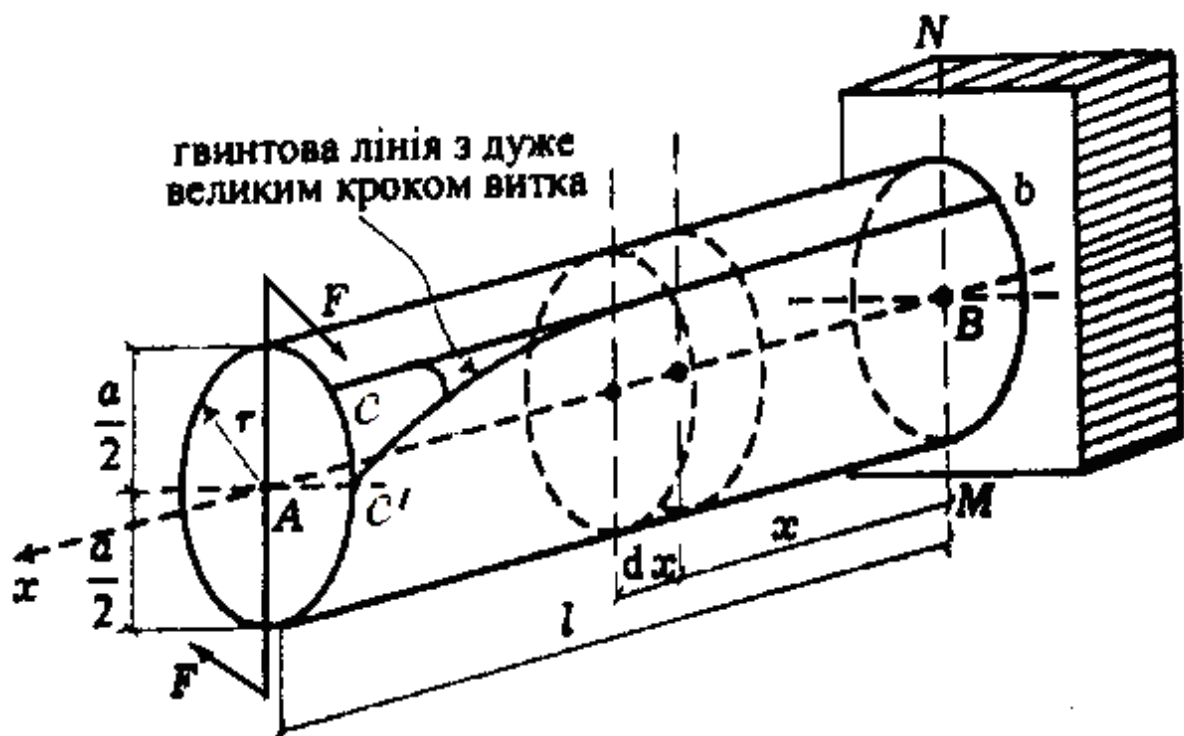


Рисунок 6.3

6.4 Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент

Внутрішні крутні моменти в поперечних перерізах валу визначаються методом перерізів з умови рівноваги відсіченої частини вала:

$$\sum M_x = 0.$$

Крутний момент у довільному поперечному перерізі валу дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що скручують (зокрема й реакції закріплення), прикладених до нього по один бік від розглянутого перерізу.

У найпростішому випадку, коли вал, навантажений по краях тільки двома зовнішніми моментами, що рівні один одному за величиною та зворотними з напрямком, крутний момент у будь-якому поперечному перерізі вала за величиною дорівнює цим зовнішнім моментам.

У складніших випадках, коли до вала прикладені кілька зовнішніх моментів, крутні моменти у поперечних перерізах будуть неоднакові на різних ділянках вала.

Під час розрахунків на міцність і жорсткість знак моменту, що крутить, не має особливого значення, однак для зручності прийняте таке правило знаків: крутний момент вважається додатним, якщо в торці відсіченої частини вала зовнішній момент спрямований за годинниковою стрілкою. Додатні й від'ємні напрямки моменту, що крутить, зображені на рисунку 6.4.

Зміну крутних моментів по довжині вала зручно відображати за допомогою епюр моментів, які будуються згідно з загальними правилами.

Для побудови епюр моментів варто зважати на те, що в перерізі, у якому на вал діє зовнішній зосереджений момент, ордината епюри міняється стрибкоподібно на величину, що дорівнює значенню цього моменту.

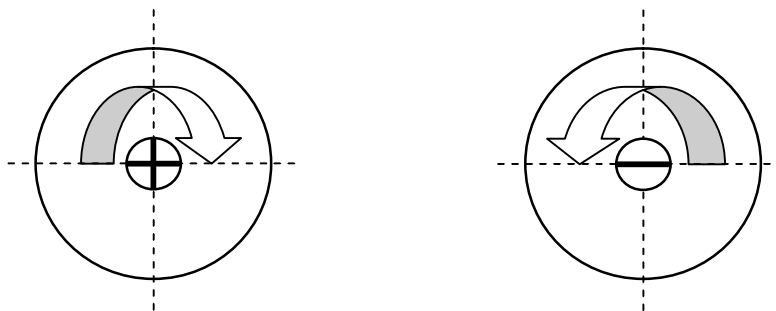


Рисунок 6.4

Якщо прямий вал перебуває у стані спокою чи рівномірного обертання, то алгебраїчна сума всіх зовнішніх моментів, прикладених до нього дорівнює нулю.

Під час розрахунку валів у низці випадків величини зовнішніх моментів, що скручують, визначають за величиною споживаної потужності й за швидкістю обертання вала. Якщо вал робить за хвилину n обертів, то кут повороту вала за 1 секунду, виражений у радіанах, дорівнює $\frac{n}{60} 2\pi = \frac{\pi n}{30}$. Робота моменту, що скручує, $M_{\text{скр}}$ за 1 секунду, тобто потужність N , що передається валом, дорівнює добутку величини моменту, що скручує, на кут повороту вала в радіанах за секунду:

$$N = \frac{M_{\text{скр}} \pi n}{30}.$$

Звідси, якщо потужність виражена в кН·м, знаходимо:

$$M_{\text{скр}} = \frac{30N}{\pi n} (\text{кН} \cdot \text{м}). \quad (6.5)$$

Якщо потужність задана в кінських силах, маємо:

$$M_{\text{скр}} = 7.162 \frac{N}{n} (\text{кН} \cdot \text{м}). \quad (6.6)$$

Якщо потужність N задана в кіловатах, то з огляду на те, що $1 \text{ к.с.} = 0.736 \text{ кВт}$, одержимо:

$$M_{\text{скр}} = 9.736 \frac{N}{n} (\text{кН} \cdot \text{м}). \quad (6.7)$$

6.5 Напруження та деформації при крученні

Для того, щоб визначити напруження, які виникають у поперечних перерізах вала, розглянемо внутрішні зусилля, що виникають у цих перерізах під час крутіння. З усіх силових факторів ненульовим виявляється тільки крутний момент, відповідно до співвідношень (1.4), який можна визначити в такий спосіб, якщо сполучити систему координат із центром ваги перерізу:

$$M_{\text{кр}} = \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA = \int_A \tau \rho dA, \quad (6.8)$$

де τ – дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dA , напрямок якого є перпендикулярним до прямої, проведеної до цієї площадки від центра ваги перерізу, як зображено на рисунку 6.5;

ρ – відстань від центра перерізу до елементарної площадки dA .

Для того щоб з'ясувати геометричну картину деформування круглого вала під час кручення, на його поверхню наносять сітку, що складається з ліній, паралельних до осі y і ліній, що представляють рівнобіжні кола. Під дією моменту, що скручує, твірні циліндра переходять у гвинтові лінії з великим шагом; рівнобіжні кола не

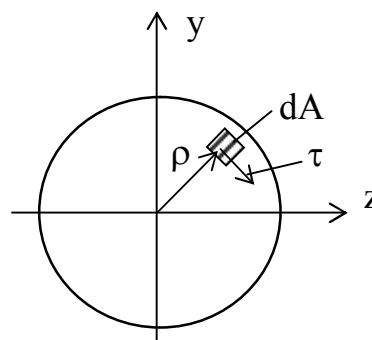


Рисунок 6.5

викривляються і відстань між ними не міняється; радіуси, проведені на торцях бруса, після деформування залишаються прямими. Припускаючи це приходимо до гіпотези плоских перерізів:

- 1) поперечні перерізи вала, плоскі й перпендикулярні до його осі до деформування, залишаються плоскими та перпендикулярними до осі й після деформування, вони тільки повертаються на деякі кути навколо неї;
- 2) радіуси поперечних перерізів не викривляються і зберігають свою довжину;
- 3) відстані уздовж осі вала між поперечними перерізами у процесі деформування не змінюються.

Ці припущення справедливі (як свідчить практика та точніші дослідження деформування) для брусів, що мають суцільний круглий чи кільцевий поперечний переріз.

Розглянемо деякий вал, навантажений моментом, що скручує, $M_{\text{скр}}$. Виділимо деяку ділянку вала (рис. 6.6), яка наведена на рисунку 6.3, довжиною dx . Припустимо, кут повороту перерізу I-I, щодо нерухомої системи координат, буде φ , а кут повороту перерізу II-II, розташованого на відстані dx буде $\varphi + d\varphi$. Отже, кут закручування розглянутої ділянки буде $d\varphi$.

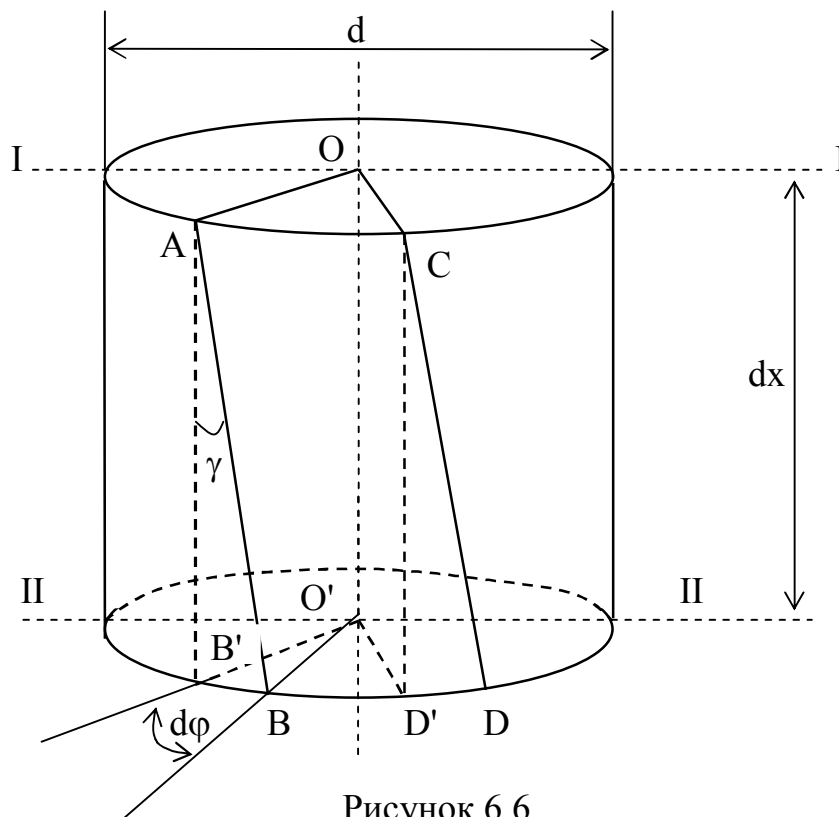


Рисунок 6.6

Розглянемо деформування прямокутного елемента $AB'D'C$, виділеного в поверхні вала, як зображено на рисунку. Оскільки радіуси залишаються прямими, то відрізок $O'B'$ повернеться в площині поперечного перерізу на кут закручування $d\varphi$ і займе положення $O'B$, а твірна AB' займе нове положення AB під кутом γ , аналогічно, твірна CD' займе положення CD .

Оскільки довжина цих відрізків не змінюється, деформування прямокутного елемента $AB'D'C$ полягає в зміні спочатку прямих кутів на величину γ , як наведено на рисунку 6.7, а кутові деформації є наслідком дотичних напружень. Отже, розглянутий елемент перебуває в умовах чистого зсуву та на його гранях діють дотичні напруження τ .

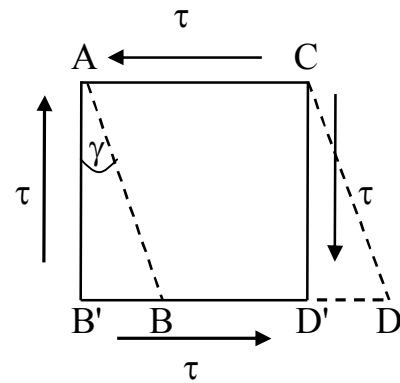


Рисунок 6.7

З урахуванням цього кут γ є кутом зсуву і, з урахуванням його малості, дорівнює:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{B'B}{AB'}.$$

Оскільки $AB' = dx$, а $B'B = R d\varphi$, кут зсуву на поверхні вала дорівнює:

$$\gamma = \vartheta R, \quad (6.9)$$

де $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$ – відносний, чи погонний кут закручування;

$R = \frac{d}{2}$ – радіус зовнішнього кола.

Аналогічно можна виділити такий само елемент усередині вала на довільній циліндричній поверхні радіуса ρ . У цьому разі кут зсуву буде дорівнювати:

$$\gamma = \vartheta \rho. \quad (6.10)$$

Оскільки розглянутий елемент усередині вала на циліндричній поверхні радіусом ρ знаходиться у стані чистого зсуву, то співвідношення (6.10), з обліком (6.2) можна подати у вигляді:

$$\tau = G \vartheta \rho. \quad (6.11)$$

Зі співвідношень (6.10) і (6.11) випливає, що кути зсуву та дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом

прямо пропорційно до відстані від центра ваги перетину (рис. 6.8). Максимальні дотичні напруження будуть на зовнішній поверхні вала, де $\rho = R$:

$$\tau_{\max} = G\vartheta R. \quad (6.12)$$

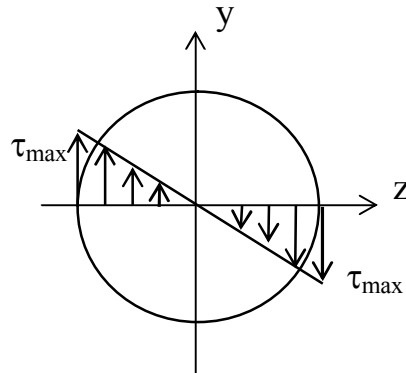


Рисунок 6.8

Для того, щоб зв'язати внутрішні зусилля, що виникають у валу та його деформації, підставимо співвідношення (6.11) у (6.8) і з врахуванням (4.10):

$$M_{\text{кр}} = \int_A \tau \rho dA = G\vartheta \int_A \rho^2 dA = G\vartheta I_p, \quad (6.13)$$

де I_p – полярний момент інерції розглянутого перерізу.

Зі співвідношення (6.13) можна одержати формулу для визначення відносного кута закручування вала:

$$\vartheta = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p}, \quad (6.14)$$

де GI_p – жорсткість вала під час кручення.

Використовуючи вираз (6.14), можна визначити кут закручування φ двох перерізів, розташованих на відстані l відносно один одного:

$$\varphi = \int_0^l \vartheta dx = \int_0^l \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} dx. \quad (6.15)$$

Якщо в межах розглянутої ділянки, крутні моменти та жорсткість не змінюється уздовж вала, то можна записати:

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_p}. \quad (6.16)$$

Ця формула встановлює лінійний зв'язок між внутрішнім зусиллям під час кручення (крутним моментом) і деформацією (кут закручування) і називається *законом Гука для кручення*. Формула справедлива у разі, коли дотичні напруження не перевершують границі пружності.

Для визначення дотичних напружень у точках перерізу на відстані ρ від центра ваги підставимо у формулу (6.11) вираження відносного кута закручування (6.14):

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}} \rho}{I_{\rho}}. \quad (6.17)$$

Максимальне дотичне напруження, що діє на зовнішній поверхні вала, буде відповідно (6.12):

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}} R}{I_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}, \quad (6.18)$$

де R – радіус круглого перерізу чи радіус зовнішнього кола кільцевого перерізу;

W_{ρ} – момент опору під час кручення.

Момент опору під час кручення дорівнює відношенню полярного моменту інерції до максимально вилученої від центра ваги точки перерізу ρ_{max} :

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\text{max}}}, \quad (6.19)$$

Для круглого перерізу:

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для кільцевого перерізу, із внутрішнім діаметром d і зовнішнім D дорівнюватиме:

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4),$$

де $\alpha = \frac{d}{D}.$

З умови міцності найбільші дотичні напруження, що виникають, не повинні перевищувати допустимих напружень (2.9):

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.20)$$

Допустимі напруження $[\tau]$ під час кручення, як і під час розтягу-стиску, залежать від властивостей матеріалу та від прийнятого коефіцієнта запасу міцності:

$$[\tau] = \frac{\tau_0}{n},$$

де τ_0 – небезпечні напруження;

n – коефіцієнт запасу міцності, залежить від матеріалу, умов експлуатації, призначення конструкції та інших факторів.

Небезпечні напруження під час кручення визначається дослідним шляхом і є характеристикою матеріалу. Для пластичних матеріалів зазвичай воно відповідає границі текучості, для крихких – границі міцності.

При розрахунку на міцність при заданих навантаженнях і геометричних характеристиках вала за формулою (6.18) визначаються найбільші дотичні напруження та порівнюються з допустимими (6.19). При цьому найбільші дотичні напруження визначаються в небезпечному перерізі, в якому крутний момент найбільший за абсолютною величиною. Для визначення небезпечного перерізу зручно будувати епюру крутних моментів.

Для підбору поперечного перерізу за заданим навантаженням із умови міцності визначається необхідна величина полярного моменту опору:

$$W_p = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{[\tau]}, \quad (6.21)$$

де $|M_{\text{кр}}|$ – максимальне за абсолютною величиною значення крутного моменту.

Розрахунок вала на жорсткість полягає в тому, щоб у ньому не виникали деформації більше припустимих, які визначаються умовами експлуатації.

Умова жорсткості вала під час крутіння має вигляд

$$\vartheta_{\max} \leq [\vartheta], \quad (6.22)$$

де ϑ_{\max} – найбільший відносний кут закручування, що визначається за формулою (6.14);

$[\vartheta]$ – відносний кут закручування, що допускається (для різних елементів конструкцій $[\vartheta] = (0.2 - 5) \cdot 10^{-4}$ радіан на 1 см довжини).

6.6 Приклади розрахунків

Приклад 1.

Знайти необхідну висоту h голівки гладкого болта, приведенного на рисунку 6.9, що сприймає навантаження $F = 80$ кН. Болт виконаний зі сталі: $[\sigma] = 16$ кН/см², $[\tau] = 10$ кН/см².

Розв'язання.

З умови міцності у разі розтягу (2.8) з урахуванням співвідношення (4.2) визначимо площу A перерізу болта:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]},$$

звідси відкіля, з урахуванням того, що $N = -F$, одержуємо:

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]} = \frac{80}{16} = 5 \text{ см}^2.$$

Визначимо далі діаметр d болта, ураховуючи, що $A = \frac{\pi d^2}{4}$:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5}{3.14}} = 2.53 \text{ см}.$$

Голівка болта піддається зрізу по поверхні циліндра, бічна поверхня якого дорівнює $h\pi d$. З умови міцності для дотичних напружень (2.9) з урахуванням співвідношення (6.4) визначимо необхідну площу бічної поверхні болта:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau], \quad A \geq \frac{F}{[\tau]}.$$

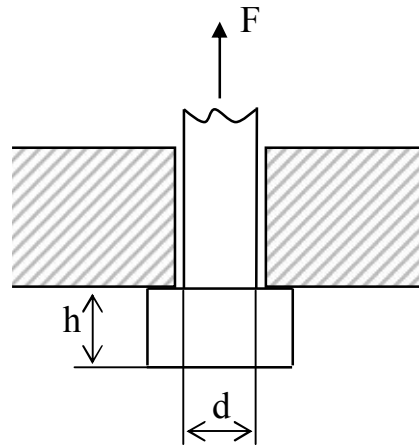


Рисунок 6.9

Звідси

$$\pi d h \geq \frac{F}{[\tau]}, \quad h \geq \frac{F}{[\tau] \pi d} = \frac{80}{10 \cdot 3.14 \cdot 2.53} = 1 \text{ см}.$$

Відповідь: висота головки болта $h = 1$ см.

Приклад 2.

Знайти діаметр заклепки d і ширину b полос, що з'єднуються, у заклепувальному з'єднанні (рис. 6.10). Навантаження $F = 200$ кН. Заклепка та смуга завтовшки $t = 1$ см виконані зі сталі, $[\sigma] = 16$ кН/см², $[\tau] = 10$ кН/см².

Розв'язання.

Визначимо необхідний діаметр заклепки з умови міцності у разі зрізи (2.9) з урахуванням співвідношення (6.4). Для цього знайдемо необхідну площу зрізу заклепок:

$$A \geq \frac{F}{[\tau]} = \frac{200}{10} = 20 \text{ см}^2.$$

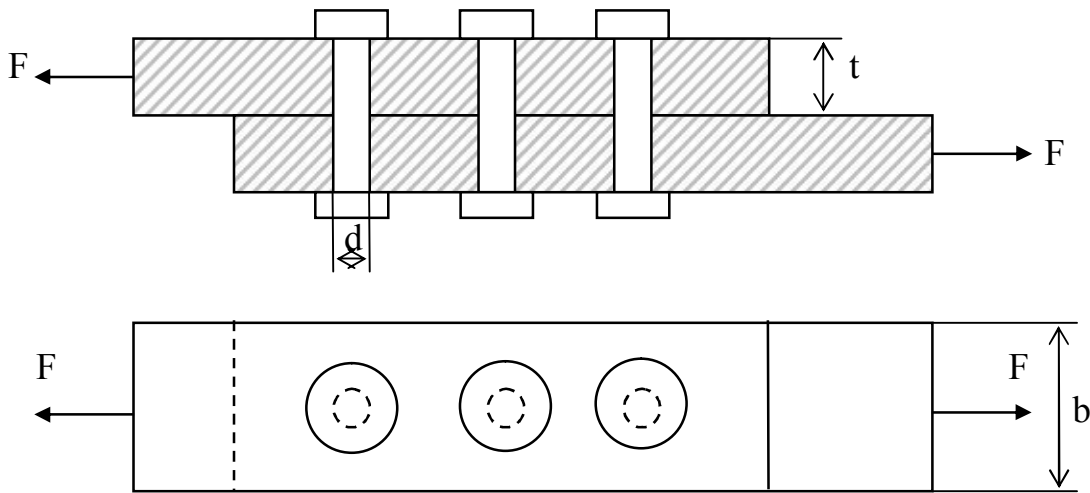


Рисунок 6.10

Оскільки площа перерізу однієї заклепки $\frac{\pi d^2}{4}$, а число заклепок дорівнює трьом, отримаємо:

$$A = 3 \frac{\pi d^2}{4},$$

звідси діаметр заклепки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{3\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20}{3 \cdot 3.14}} = 2.91 \text{ см}.$$

Площа полос, що з'єднуються, у найвужчому поперечному перерізі дорівнює:

$$A = t(b - d).$$

З умови міцності у разі розтягу (2.8) і співвідношення (4.2) визначимо необхідну площу перерізу смуг, що з'єднуються:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{F}{16} = 12.5 \text{ см.}$$

Звідси:

$$t(b - d) = 12.5, \quad b = \frac{12.5}{t} + d = \frac{12.5}{1} + 2.91 = 15.41 \text{ см.}$$

Відповідь: діаметр заклепки $d = 2.91$ см, ширина смуг $b = 15.41$ см.

Приклад 3.

Визначити діаметр вала, що закручується за допомогою моменту $M_{кр} = 40$ кН·м, якщо напруження, що допускаються, $[\tau] = 8$ кН/см².

Розв'язання.

За формулою (6.21) знайдемо необхідний момент опору вала під час кручення:

$$W_{\rho} = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{40 \cdot 100}{8} = 500 \text{ см}^3,$$

де множник 100 використовується для приведення моменту до кН·см.

Знайдемо діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16W_{\rho}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 500}{3.14}} = 13.7 \text{ см.}$$

Відповідь: діаметр вала $d = 13.7$ см.

Приклад 4.

Вал кільцевого поперечного перерізу, у якого $\alpha = \frac{d_{в}}{d_{н}} = 0.8$, закручується за допомогою моменту $M_{кр}$. Визначити економію у вазі в порівнянні із суцільним валом тієї самої міцності.

Розв'язання.

За формулою (6.21) і, використовуючи співвідношення, знайдемо необхідний діаметр круглого вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \frac{M_{кр}}{[\tau]}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]} \frac{16}{3.14}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}}.$$

Площа перерізу круглого вала:

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \left(0.72 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2}{4} = 2.32 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2.$$

Аналогічно знайдемо необхідний зовнішній діаметр вала кільцевого перерізу:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \frac{M_{кр}}{[\tau]}}{\pi(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]} \frac{16}{3.14(1 - 0.8^4)}} = 2.05 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}}.$$

Внутрішній діаметр вала буде:

$$d = \alpha D = 0.8 \cdot 2.05 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} = 1.64 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}}.$$

Площа перерізу кільцевого вала дорівнює:

$$\begin{aligned} A_{кол} &= \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \left(2.05 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2}{4} - \frac{3.14 \left(1.64 \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2}{4} = \\ &= 3.3 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2 - 2.11 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2 = 1.19 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2. \end{aligned}$$

Відношення ваг валів дорівнює відношенню їхніх площ перерізів, отже, економія у вазі буде визначатися за допомогою відношення:

$$\frac{A_{кр}}{A_{кол}} = \frac{2.32 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2}{1.19 \left(\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]}} \right)^2} = \frac{2.32}{1.19} = 1.95.$$

Відповідь: вал кільцевого перерізу буде важити в 1.95 рази менше вала круглого перерізу з такою самою міцністю.

Приклад 5.

З умови міцності й жорсткості визначити діаметр суцільного вала круглого перерізу, наведеного на рисунку 6.11, а.

Моменти, що передаються за допомогою шківів: $M_1 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2 = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_3 = 180 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_4 = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Допустимі дотичні

напруження, $[\tau] = 12 \text{ кН/см}^2$; Кут закручування, що допускається, $[\vartheta] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ рад/см}$; модуль пружності у разі зсуву $G = 8 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$.

Розв'язання.

Побудуємо епюру крутних моментів. Оскільки вал перебуває в стані рівномірного обертання, то алгебраїчна сума всіх зовнішніх моментів, що скручують, прикладених до нього, дорівнює нулю:

$$\sum M_{\text{кр}} = M_1 + M_2 - M_3 + M_4 = 40 + 80 - 180 + 60 = 0.$$

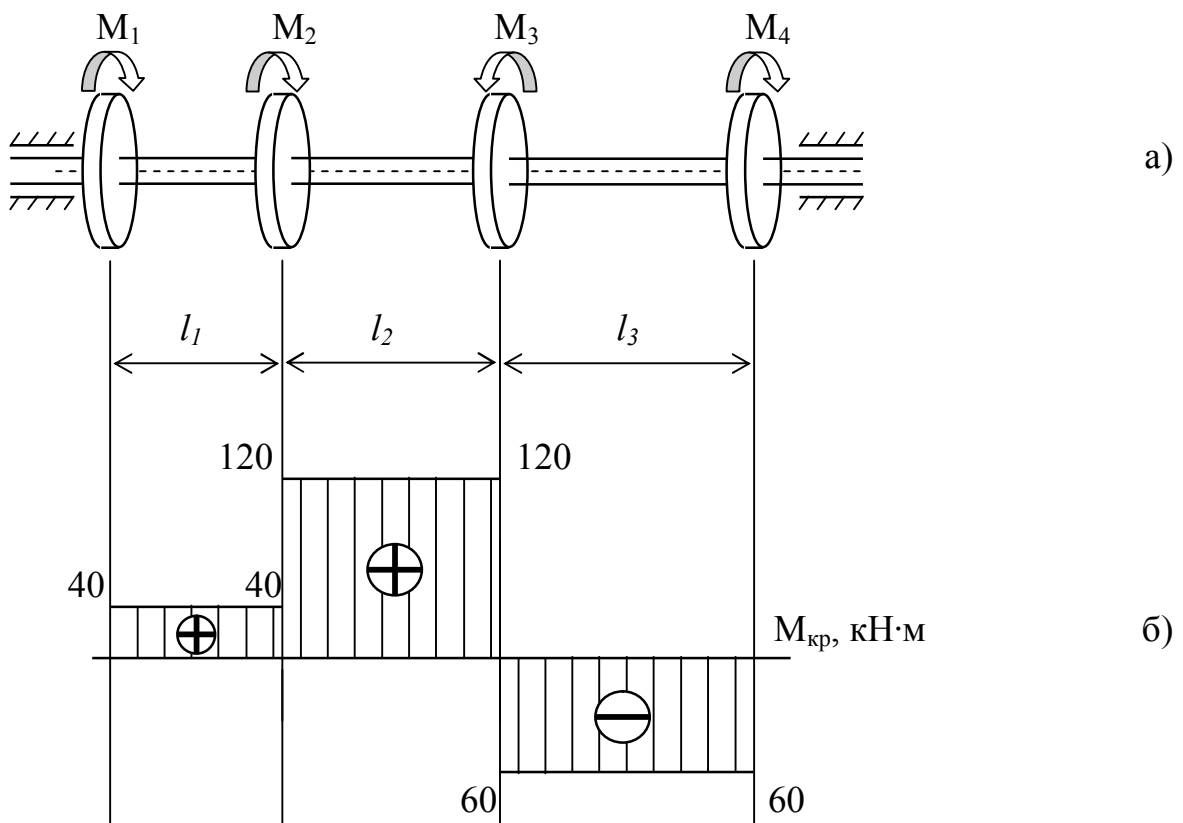


Рисунок 6.11

Крутний момент у перерізах дорівнює сумі моментів у відкинутій частині. Порахуємо ці моменти, що виникають у перерізах різних ділянок вала, як зображено на схемі:

на ділянці l_1 : $M_{\text{кр}1} = M_1 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

на ділянці l_2 : $M_{\text{кр}2} = M_1 + M_2 = 40 + 80 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

на ділянці l_3 : $M_{\text{кр}3} = M_1 + M_2 - M_3 = 40 + 80 - 180 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Епюра крутних моментів наведена на рисунку 6.11, б.

Згідно з епюром, максимальний крутний момент діє на другій ділянці

З умови міцності за формулою (6.21) знайдемо необхідний діаметр круглого вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{[\tau]} \frac{16}{3.14}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{120 \cdot 100}{12}} = 17.2 \text{ см.}$$

З умови жорсткості вала під час кручення за формулою (6.22), знайдемо необхідний діаметр круглого вала:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G[\theta]\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 120 \cdot 100}{8000 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 3.14}} = 13.2 \text{ см}$$

З двох знайдених значень діаметрів необхідно прийняти більший. Ним буде діаметр, знайдений з умови міцності.

Відповідь: діаметр вала $d = 17.2 \text{ см.}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Опір матеріалів. Ч. 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях : конспект лекцій з дисциплін «Опір матеріалів», «Опір матеріалів та основи будівельної механіки», «Основи теорії споруд» для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямками 6.060101 – «Будівництво», 6.060102 – «Архітектура», 6.060103 – «Гідротехніка (Водні ресурси)», 6.030611 – «Менеджмент») / За заг. ред. В. П. Шпачука; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 139 с.

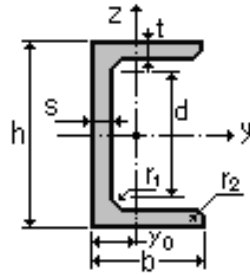
2. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманській. – Київ : Вища школа. 1993. – 655 с.

3. Теоретична механіка : конспект лекцій і завдання для контрольних і самостійних робіт (для студентів 1 і 2 курсів денної та заочної форм навчання бакалаврів за напрямками 6.060101 – Будівництво, 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 – «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 – «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 – «Охорона праці» та слухачів другої вищої освіти спеціальностей: 7.05070203 – «Електричний транспорт», 7.06010103 – «Міське будівництво та господарство», 7.06010101 – «Промислове та цивільне будівництво», 7.06010107 – «Теплогазопостачання і вентиляція») / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2014. – 118 с.

4. Шутенко Л. Н. Основы теории упругости и пластичности : учебное пособие для студентов строительных специальностей / Л. Н. Шутенко, Н. А. Засядько, А. А. Чупрынин. – Харків : ХНАГХ, 2007. – 135 с.

ДОДАТОК А

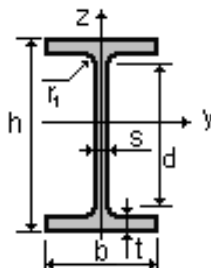
Швелер за ДСТУ 8240-89



	h	b	s	t	r_1	r_2	A	P	I_y	W_y	i_y	S_y	y_0
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	T/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³	cm
8	8.00	4.0	0.45	0.74	0.65	0.25	8.98	0.007	89.4	22.4	3.160	23.300	1.310
10	10.0	4.6	0.45	0.76	0.70	0.30	10.9	0.009	174	34.8	3.990	20.400	1.440
12	12.0	5.2	0.48	0.78	0.75	0.30	13.3	0.010	304	50.6	4.780	29.600	1.540
14	14.0	5.8	0.49	0.81	0.80	0.30	15.6	0.012	491	70.2	5.600	40.800	1.670
16	16.0	6.4	0.50	0.84	0.85	0.35	18.1	0.014	747	93.4	6.420	54.100	1.800
18	18.0	7.0	0.51	0.87	0.90	0.35	20.7	0.016	1090	121.0	7.240	69.800	1.940
20	20.0	7.6	0.52	0.90	0.95	0.40	23.4	0.018	1520	152.0	8.070	87.800	2.070
22	22.0	8.2	0.54	0.95	1.00	0.40	26.7	0.021	2110	192.0	8.890	110.000	2.210
24	24.0	9.0	0.56	1.00	1.05	0.40	30.6	0.024	2900	242.0	9.730	139.000	2.420
27	27.0	9.5	0.60	1.05	1.10	0.45	35.2	0.028	4160	308.0	10.900	178.000	2.470
30	30.0	10.0	0.65	1.10	1.20	0.50	40.5	0.032	5810	387.0	12.000	224.000	2.520
40	40.0	11.5	0.80	1.35	1.50	0.60	61.5	0.048	15220	761.0	15.700	444.000	2.750

ДОДАТОК Б

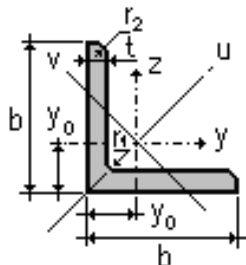
Двотавр за ДСТУ 8239-89



	h	b	s	t	r_1	r_2	A	P	I_y	W_y	i_y	S_y
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	T/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³
10	10.0	5.5	0.450	0.720	0.700	0.250	12.0	0.009	198.0	39.700	4.060	23.000
12	12.0	6.4	0.480	0.730	0.750	0.300	14.7	0.012	350.0	58.400	4.880	33.700
14	14.0	7.3	0.490	0.750	0.800	0.300	17.4	0.014	572.0	81.700	5.730	46.800
16	16.0	8.1	0.500	0.780	0.850	0.350	20.2	0.016	873.0	109.000	6.570	62.300
18	18.0	9.0	0.510	0.810	0.900	0.350	23.4	0.018	1290.0	143.000	7.420	81.400
20	20.0	10.0	0.520	0.840	0.950	0.400	26.8	0.021	1840.0	184.000	8.280	104.000
22	22.0	11.0	0.540	0.870	1.000	0.400	30.6	0.024	2550.0	232.000	9.130	131.000
24	24.0	11.5	0.560	0.950	1.050	0.400	34.8	0.027	3460.0	289.000	9.970	163.000
27	27.0	12.5	0.600	0.980	1.100	0.450	40.2	0.032	5010.0	371.000	11.200	210.000
30	30.0	13.5	0.650	1.020	1.200	0.500	46.5	0.037	7080.0	472.000	12.300	268.000
33	33.0	14.0	0.700	1.120	1.300	0.500	53.8	0.042	9840.0	597.000	13.500	339.000
36	36.0	14.5	0.750	1.230	1.400	0.600	61.9	0.049	13380	743.000	14.700	423.000
40	40.0	15.5	0.830	1.300	1.500	0.600	72.600	0.057	19062	953.000	16.200	545.000
45	45.0	16.0	0.900	1.420	1.600	0.700	84.700	0.067	27696	1231.00	18.100	708.000
50	50.0	17.0	1.000	1.520	1.700	0.700	100.00	0.078	39727	1589.00	19.900	919.000
55	55.0	18.0	1.100	1.650	1.800	0.700	118.00	0.093	55962	2035.00	21.800	1181.00
60	60.0	19.0	1.200	1.780	2.000	0.800	138.00	0.108	76806	2560.00	23.600	1491.00

ДОДАТОК В

Кутник рівнобокий за ДСТУ 8509-93



	b	t	r_1	r_2	A	$I_y=I_z$	W_y	i_y	I_u	i_u	I_v	W_v	i_v	I_{yz}	y_0	P
	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	T/m
L50x5	5.000	0.500	0.550	0.180	4.800	11.20	3.130	1.530	17.77	1.920	4.630	2.300	0.980	6.570	1.420	0.004
L63x5	6.300	0.500	0.700	0.230	6.130	23.10	5.050	1.940	36.80	2.440	9.520	3.870	1.250	13.70	1.740	0.005
L70x5	7.000	0.500	0.800	0.270	6.860	31.94	6.270	2.160	50.67	2.720	13.22	4.920	1.390	18.70	1.900	0.005
L75x6	7.500	0.600	0.900	0.300	8.780	46.57	8.570	2.300	73.87	2.900	19.28	6.620	1.480	27.30	2.060	0.007
L80x6	8.000	0.600	0.900	0.300	9.380	56.97	9.800	2.470	90.40	3.110	23.54	7.600	1.580	33.40	2.190	0.007
L90x6	9.000	0.600	1.000	0.330	10.61	82.10	12.49	2.780	130.0	3.500	33.97	9.880	1.790	48.10	2.430	0.008
L90x7	9.000	0.700	1.000	0.330	12.28	94.30	14.45	2.770	149.7	3.490	38.94	11.15	1.780	55.40	2.470	0.010
L100x7	10.00	0.700	1.200	0.400	13.75	130.6	17.90	3.080	207.0	3.880	54.16	14.13	1.980	76.40	2.710	0.011
L100x8	10.00	0.800	1.200	0.400	15.60	147.2	20.30	3.070	233.5	3.870	60.92	15.66	1.980	86.30	2.750	0.012
L110x8	11.00	0.800	1.200	0.400	17.20	198.2	24.77	3.390	314.5	4.280	81.83	19.29	2.180	116.0	3.000	0.013
L125x8	12.50	0.800	1.400	0.460	19.69	294.4	32.20	3.870	466.8	4.870	122.0	25.67	2.490	172.0	3.360	0.015
L125x9	12.50	0.900	1.400	0.460	22.00	327.5	36.00	3.860	520.0	4.860	135.9	28.26	2.480	192.0	3.400	0.017
L140x9	14.00	0.900	1.400	0.460	24.72	465.7	45.55	4.340	739.4	5.470	192.0	35.92	2.790	274.0	3.780	0.019
L140x10	14.00	1.000	1.400	0.460	27.33	512.3	50.32	4.330	813.6	5.460	211.0	39.05	2.780	301.0	3.820	0.021
L160x10	16.00	1.000	1.600	0.530	31.43	774.2	66.19	4.960	1229	6.250	319.4	52.52	3.190	455.0	4.300	0.025
L160x11	16.00	1.100	1.600	0.530	34.42	844.2	72.44	4.950	1340	6.240	347.8	56.53	3.180	496.0	4.350	0.027
L160x16	16.00	1.600	1.600	0.530	49.07	1175	102.6	4.890	1865	6.170	484.6	75.92	3.140	690.0	4.550	0.039
L180x11	18.00	1.100	1.600	0.530	38.80	1216	92.47	5.600	1933	7.060	499.8	72.86	3.590	716.0	4.850	0.030
L180x12	18.00	1.200	1.600	0.530	42.19	1316	100.4	5.590	2092	7.040	540.4	78.15	3.580	776.0	4.890	0.033
L200x12	20.00	1.200	1.800	0.600	47.10	1822	124.6	6.220	2896	7.840	749.4	98.68	3.990	1073	5.370	0.037
L200x14	20.00	1.400	1.800	0.600	54.60	2097	144.2	6.200	3333	7.810	861.0	111.5	3.970	1236	5.460	0.043
L200x25	20.00	2.500	1.800	0.600	94.29	3466	245.6	6.060	5494	7.630	1438	172.7	3.910	2028	5.890	0.074
L200x30	20.00	3.000	1.800	0.600	111.5	4019	288.5	6.000	6351	7.550	1698	193.0	3.890	2332	6.070	0.088
L220x16	22.00	1.600	2.100	0.700	68.58	3175	198.7	6.800	5045	8.580	1305	153.3	4.360	1869	6.020	0.054
L250x16	25.00	1.600	2.400	0.800	78.40	4717	258.4	7.760	7492	9.780	1942	203.4	4.980	2775	6.750	0.062
L250x20	25.00	2.000	2.400	0.800	96.96	5764	318.6	7.710	9159	9.720	2370	242.5	4.940	3395	6.910	0.076

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович,
ЧУПРИНІН Олександр Олексійович,
СЕРЕДА Наталія Василівна,
СКЛЯРОВ В'ячеслав Олександрович

«ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

Частина 1

Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології)

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

Редактор *В. І. Шалда*

Комп'ютерне верстання *О. О. Чупринін*

План 2018, поз. 114 Л

Підп. до друку 03.10.2018. Формат 60×84 1/16.

Друк на ризографі. Ум.-друк. арк. 4,8.

Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.